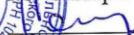


Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования
«Центр детского творчества «Мастер плюс» городского округа Самара
(МБУ ДО «ЦДТ «Мастер плюс» г.о.Самара)



УТВЕРЖДАЮ

Директор МБУ ДО «ЦДТ «Мастер плюс»
г.о. Самара

 М.В.Сокур

«08» апреля 2025 г.

Программа принята на основании решения
Методического совета
Протокол № 1.1 от «08» апреля 2025 г.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Максимум»

Направленность: естественнонаучная

Возраст обучающихся: 12-18 лет

Срок реализации программы: 2 года

Разработчик:

Романенко Оксана Александровна,
педагог дополнительного образования,

Самара, 2025 г.

Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования
«Центр детского творчества «Мастер плюс» городского округа Самара
(МБУ ДО «ЦДТ «Мастер плюс» г.о.Самара)



УТВЕРЖДАЮ

Директор МБУ ДО «ЦДТ «Мастер плюс»
г.о. Самара

_____ М.В.Сокур

«08» апреля 2025 г.

Программа принята на основании решения
Методического совета
Протокол № 1.1 от «08» апреля 2025 г.

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа

«Матрица»

Направленность: естественнонаучная

Возраст обучающихся: 12-18 лет

Срок реализации программы: 2 года

Разработчик:

Романенко Оксана Александровна,
педагог дополнительного образования,

Самара, 2025 г.

Паспорт программы

Направленность образовательной деятельности	Естественнонаучная
Уровень освоения содержания предметной деятельности	Базовая
Уровень организации педагогической деятельности	Учебно-исследовательская
Форма организации детских формирований	Групповая
Возраст обучения детей	Основное общее и среднее (полное) общее образование
Срок реализации программы	2 года
Масштаб реализации	Учрежденческая
По контингенту обучающихся	Общая
По степени творческого подхода	Репродуктивно-творческая
Степень реализации программы	Реализована полностью
Нормативный часовой объем за год	1 год обучения – 4 часа в неделю, 144 часа в год 2 год обучения – 4 час. в неделю, 144 час. в год
Количество детей в группе	Не менее 10 чел.

Краткая аннотация

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Максимум» предназначена для обучающихся 12 – 18 лет, проявляющих интерес к астрофизике. В результате обучения дети узнают приемы и методы решения нестандартных математических задач, формулы сокращенного умножения для разложения многочленов на множители при выполнении арифметических действий с алгебраическими дробями, функциональную терминологию, понимать ее в тексте, в речи учителя, в формулировках различных заданий, геометрические формы, которые являются идеализированными образами реальных объектов, геометрический язык для описания предметов окружающего мира, выполнять более сложные построения с помощью циркуля и линейки, различные способы доказательства теоремы Пифагора, метод координат при решении задач, различные методы решения уравнений (разложение на множители, введение новой переменной, деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение и т.д.), отношения площадей поверхностей и объемов.

1. Пояснительная записка

Программа разработана согласно требованиям следующих нормативных документов:

- Федеральный Закон Российской Федерации от 2.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года, утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 31.03.2022 № 678-р;
- Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам (утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 27.07.2022 № 629);
- Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года (утверждена Распоряжением Правительства Российской Федерации от 29.05.2015 № 996-р);
- Устав муниципального бюджетного учреждения дополнительного образования «Центр детского творчества «Мастер плюс» городского округа Самара и другие локальные нормативные акты учреждения;
- Национальный проект «Молодежь и дети» до 30 года.

Математика является тем инструментом, без которого в настоящее время невозможно полноценное развитие людей науки. Следовательно, изучение какой-либо науки требует глубокого знания математики. Если же учесть, что все современное производство, сельское хозяйство, сфера обслуживания строится на научной основе, то станет понятным утверждение академика А.Н. Колмогорова: «Без знания математики нельзя понять ни основ современной техники, ни того, как ученые изучают природные и социальные явления».

Одним из наиболее важных качеств мышления является его логичность. Это ценнейшее качество возникает и развивается главным образом в процессе изучения математики. Математика – это практическая логика, в ней каждое новое положение изучается с помощью строго обоснованных рассуждений на основе ранее известных положений, то есть строго доказывается. На это же значение математики указывал М.И. Калинин: «Математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. Недаром говорят, что математика – это гимнастика ума».

Математика формирует не только логическое мышление, но и много других качеств человека: сообразительность, настойчивость, аккуратность, критичность. Изучение математики развивает внимание и волю, воображение, укрепляет память.

В наше время юноша или девушка, окончившие среднюю школу должны иметь представление о месте и роли математики в современной передовой культуре. Знакомство с

историей математики служит общим целям воспитания детей. Однако, школьные учебники, как известно, исторических сведений содержат мало. Поэтому, при изучении той или иной темы, для полного и глубокого раскрытия ее содержания целесообразно использовать историю науки.

Исторически сложились две стороны назначения математики: практическая и духовная. Практическая значимость математики обусловлена тем, что ее объектом являются пространственные формы и количественные отношения действительного мира. Значение математического образования для формирования духовной сферы человека, интеллектуальных и морально-этических компонентов человеческой личности обусловлено тем громадным запасом общечеловеческих и общекультурных ценностей, которые накопила математическая наука в ходе своего развития.

Математика в наше время проникает во все сферы общественной жизни. Овладение практически любой современной профессией требует знания математики. С математикой связана компьютерная грамотность, повсеместное распространение которой является одной из первоочередных задач народного образования сегодня. Математические знания, представления о роли математики в современном мире стали необходимыми компонентами общей культуры. Математика является опорным предметом, обеспечивающим изучение на современном уровне ряда других дисциплин, как естественных, так и гуманитарных, а также трудового обучения. Необходимо отметить, что математика является профилирующим предметом на вступительных экзаменах в ВУЗы по широкому спектру специальностей. Наряду с поступающими на математические отделения и в технические ВУЗы вступительные экзамены по математике должны сдавать будущие физики, химики, биологи, врачи, психологи, экономисты.

Автором были изучены и проанализированы программы по математике, а также методические материалы по организации образовательной деятельности с детьми. В ходе реализации программы используются современные технологии воспитательной и образовательной работы в условиях дополнительного образования.

Актуальность и новизна общеразвивающей программы «Максимум» заключена в том, что содержание учебного материала представлено модулями, позволяющими увеличить её гибкость и вариативность. Модульность, как и разноуровневость, позволяет более вариативно организовать образовательный процесс, оперативно подстраиваясь под интересы и способности обучающихся. Модульная образовательная программа «Максимум» даёт обучающемуся возможность выбора модулей, нелинейной последовательности их изучения.

В образовательной программе «Максимум» органически сочетаются различные игровые и образовательные формы деятельности, что усиливает стартовые возможности личности на рынке труда и профессионального образования. Программа актуальна, поскольку является вариативной, дает возможность каждому обучающемуся с различным уровнем подготовки проявить и реализовать свои творческие способности. Желание достичь лучшего результата, улучшить знания по предмету возникает у детей на протяжении всего периода обучения: на первом этапе – в ходе учебной игры, на втором – в ходе проведения математических декад, научных конференций, олимпиад, на третьем – в результате осознанного стремления к самосовершенствованию в исследовательско-поисковой деятельности.

Творческая исследовательская проектная деятельность воспитанников выражается в создании ими творческих проектов и их защите. Воспитанники ежегодно принимают участие в городской научно-практической конференции учащихся, олимпиадах по направлению. Традиционным стало участие в Международном конкурсе-игре «Кенгуру».

Работа в методике творческого проектирования, использование метода проектов позволяет на практике реализовать деятельностный подход в трудовом обучении воспитанников и интегрировать знания и умения, полученные ими на всех этапах обучения, сформулировать ключевые образовательные компетентности.

При оценке проектной деятельности можно выделить три ключевые образовательные компетентности:

- самоуправление (решение проблем);
- информационную (или технологическую);
- коммуникативную и в рамках обозначить те способы деятельности, которые должен освоить воспитанник на том или ином этапе выполнения проекта.

Характерные черты и особенности программы:

- Тематические блоки программы расположены по определенной системе: от более простых к более сложным; каждый блок имеет свою логическую структуру.
- Предложенный вариативный учебный план позволяет учитывать различную степень подготовки обучающихся, их индивидуальные способности.
- Содержание программы углубляет и дополняет имеющиеся школьные программы обучения; позволяет максимально разнообразить творческую и исследовательскую деятельность ребят.
- Формы организации и методы проведения занятий обеспечивают формирование навыков работы в коллективе, интерес к предмету, к творческой деятельности, в результате чего не наступает переутомление детей, ребенок избавляется от ненужных переживаний из-за неудач.

Учреждения дополнительного образования входят в число образовательных организаций, через деятельность которых реализуется концепция развития Самарской области до 2030г. по приоритетным отраслевым кластерам, среди которых производство автомобилей и автокомпонентов, авиакосмическое машиностроение, водное сообщение.

Исходя из этого определяются цели и задачи общеобразовательных, общеразвивающих программ различных направлений Центра.

Цели программы:

Создание условий для вовлечения обучающихся в научно – исследовательскую деятельность, связанную с наблюдением, моделированием и интеграцией с различными областями знаний в области наноинженерии и метаматериалов.

Задачи программы:

Обучающие:

- познакомить обучающихся с историей и современными направлениями развития математики на основе изучения дополнительного материала (исторические сведения, задачи повышенной сложности);
- учить детей работать с дополнительной информацией (в т.ч. интернет-источники) при подготовке докладов, рефератов, сообщений;
- обучить различным приемам и математическим методам при решении нестандартных задач и задач с практическим содержанием

Воспитательные:

- формировать навыки коллективного труда, воспитывать такие качества как взаимовыручка и взаимоподдержка;
- воспитывать у обучающихся настойчивость, критичность мышления, умение высказывать гипотезы и отстаивать мнение

Развивающие:

- привлекать обучающихся к участию в математических мероприятиях (декадах, олимпиадах, играх, конференциях и т.д.);
- формировать у обучающихся общекультурных компетенций, осознанности применения знаний, осознание математики как части общемировой культуры

Реализация программы направлена на:

- освоение содержания образовательной программы обучающимися – программа направлена на значительное качественное изменение их знаний, умений, навыков.
- устойчивость интереса обучающихся – для поддержки и повышения устойчивого интереса обучающихся к выбранному направлению деятельности, стимулирования их творческой активности.
- творческие достижения обучающихся – программа реализуется в целях достижения ими высоких результатов в мероприятиях различного уровня (учрежденческого, районного, городского, областного).

Обучающиеся должны знать:

- приемы и методы решения нестандартных математических задач;
- формулы сокращенного умножения для разложения многочленов на множители при выполнении арифметических действий с алгебраическими дробями;
- функциональную терминологию, понимать ее в тексте, в речи учителя, в формулировках различных заданий;
- геометрические формы, которые являются идеализированными образами реальных объектов;
- геометрический язык для описания предметов окружающего мира, выполнять более сложные построения с помощью циркуля и линейки;
- различные способы доказательства теоремы Пифагора;
- метод координат при решении задач;
- различные методы решения уравнений (разложение на множители, введение новой переменной, деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение и т.д.);
- отношения площадей поверхностей и объемов

Обучающиеся должны уметь:

- применять полученные знания на практике;
- правильно выполнять арифметические действия с рациональными числами, составлять и решать пропорции, решать задачи повышенной сложности на дроби и проценты, иметь представление о различных системах счисления;
- решать задачи типа конкурсных на арифметическую и геометрическую прогрессии;
- выполнять более сложные преобразования тригонометрических, логарифмических, показательных, степенных, иррациональных выражений;
- решать линейные, квадратные уравнения, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические, содержащие неизвестную величину под знаком модуля, параметры;
- применять метод интервалов при решении неравенств;
- решать неравенства, содержащие переменные под знаком модуля, параметры, системы уравнений и неравенств с модулями, с параметрами;
- строить графики элементарных функций, преобразовывать, строить графики функций, связанных с модулем, проводить элементарные исследования функций;
- решать неравенства второй степени с одной переменной, стоящей под знаком модуля;
- применять метод интервалов при решении неравенств третьей, четвертой и т.д. степеней;
- интерпретировать в более сложных случаях графики реальных зависимостей между величинами;

- исследовать функции с помощью производной и строить графики;
- решать задачи повышенной трудности на движение и подобие, на нахождение объемов площадей поверхностей многогранников, тел вращения, комбинации тел, углов между прямой и плоскостью, между плоскостями

Образовательная программа «Максимум» предназначена для детей школьного среднего и старшего школьного возраста и рассчитана на обучение в течении 2-х лет.

В творческое объединение принимаются ребята среднего и старшего школьного возраста, интересующиеся математикой. Занятия проводятся с 1 сентября по 31 мая включительно. Количество часов занятий в году с воспитанниками первого года обучения – 144, по 4 часа в неделю, второго года обучения- 144, по 4 часа в неделю. При комплектовании учебных групп можно формировать разновозрастные группы.

При организации занятий, педагог использует элементы дифференцированного подхода. После проведения собеседования с обучающимися, опираясь на свой педагогический опыт, педагог может выделить менее или более способных детей. Все дети на занятии работают вместе. По ходу занятия они могут получать разные по сложности задания.

Педагог использует следующие виды дифференциации:

- дифференциация заданий по объему материала;
- дифференциация по самостоятельности;
- дифференциация по поведенческой реакции;

Дифференцированный подход в обучении позволяет добиться повышения качества знаний обучающихся, уровня их умений и навыков, исключается уравниловка детей.

Мероприятия по набору детей в группу начинаются в конце августа, чтобы в День знаний (1 сентября) в парке, на школьной площадке уже можно было показать наглядно работы учащихся объединения с привлечением наиболее активных обучающихся.

Определенную помощь оказывает семейный праздник «День открытых дверей», когда проводятся демонстрационные игры с привлечением нынешних и будущих обучающихся ЦДТ.

Большая часть занятий проводится в учебном кабинете, но часть календарно - тематического плана отводится на внеучебную и воспитательную работу. Воспитательный компонент является важной составляющей частью образовательного процесса, в который заложены базовые ценности, способствующие всестороннему развитию личности обучающихся и их успешной социализации в современных условиях. Основные направления воспитательной работы с обучающимися включают в себя следующие компоненты воспитания: гражданское, патриотическое, духовно-нравственное, эстетическое, трудовое, физическое, экологическое и познавательное.

При планировании воспитательных мероприятий необходимо предусматривать, как отмечать индивидуальные заслуги ребенка и коллективные достижения группы, учитывать помощь старших детей младшим, что развивает навыки заботы о других и лидерские качества.

Интересные для личностного развития ребенка совместные мероприятия позволяют вовлекать в них детей с разными потребностями, дают им возможность для самореализации, устанавливают и укрепляют доверительные отношения.

В дни школьных каникул работа в объединении проводится по обычному расписанию и включает в себя экскурсии, посещение музеев, знакомство с историей старой Самары, пешие экскурсии по городу, посещение выставок.

Кроме работы с детьми, педагог, реализующий данную программу, уделяет особое внимание работе с родителями, чья помощь очень ценна. Педагог изучает воспитательные возможности семьи, социального окружения обучающегося для дальнейшего построения взаимодействия и сотрудничества, изучает психологическую комфортность условий

образовательного процесса для оптимального достижения образовательных результатов. Родители могут принимать участие и помогать в организации совместных мероприятий, посещений выставок и концертов. Задача педагога – пробудить в родителях интерес к любимому делу своего ребенка и постоянно его укреплять.

Для успешной реализации программы учебный материал построен на следующих положениях:

Приоритет развития личности обучающихся (коммуникативного, когнитивного, социокультурного, эмоционального), осуществляемого в процессе овладения детьми языком как средством общения на межкультурном уровне.

Коммуникативный подход к обучению и изучению языка, основная функция которого состоит в создании условий коммуникации: мотивов, целей и задач общения;

Осознанное овладение детьми новым языком, в процессе которого происходит их когнитивное развитие, поскольку предполагает познание и осознание обучающимися языковых средств в их системе и коммуникативных функциях.

Изучение/обучение языку в контексте диалога культур, что обеспечивает социокультурное и когнитивное развитие личности младшего школьника.

Содержательная оценка обучающихся по программе должно включать в себя 4 компонента:

- доброжелательное отношение к обучающемуся как личности;
- положительное отношение к усилиям ребенка, направленным на решение задачи (даже если эти усилия не дали положительного результата);
- конкретный анализ трудностей, вставших перед детьми, и допущенных им ошибок;
- конкретные указания на то, как можно улучшить достигнутый результат.

Оценка должна включать в себя все эти компоненты, даже если результат работы обучающегося отрицательный.

Работа педагога с родителями (законными представителями) осуществляется, в основном, в форме родительских собраний и индивидуальных собеседований. В рамках собеседований педагог и родители проводят совместный анализ физического и нравственного состояния учащегося. По итогам собеседования принимается совместное решение о том, что будет делать педагог, а что будут делать родители для того, чтобы их ребенок мог успешно развиваться и добиваться более высоких результатов. Помимо этого, родители могут принимать участие и помогать в организации совместных мероприятий, посещений выставок и концертов. Задача педагога – пробудить в родителях интерес к любимому делу своего ребенка и постоянно его укреплять.

Организация дистанционного обучения осуществляется через образовательную платформу Сферум, которая является закрытым безопасным пространством для учебы и общения педагогов, обучающихся и их родителей (законных представителей)

При реализации программы применяются следующие формы и методы организации учебных занятий:

- Беседы, лекционные занятия, сообщения нацелены на создание условий для развития способности слушать и слышать, видеть и замечать, концентрироваться, наблюдать и воспринимать;
- Контрольные работы – помогают развивать способности излагать свою точку зрения, доказывать, логически мыслить;

– Устная индивидуальная проверка, различные конкурсы – помогают доводить образовательную деятельность до результата, фиксировать успех, демонстрировать достижения обучающихся, учат их достойно воспринимать достижение других людей и т.д.;

– Организация игровых ситуаций, состояний с активным движением – помогают приобретать привычки здорового образа жизни. Опыт взаимодействия, принимать решения, брать на себя ответственность.

В целях создания дополнительных условий для эффективного развития обучающихся в общеразвивающей программе присутствуют элементы наставничества, которые предполагают регулярное взаимодействие педагога и ребенка в процессе обучения, воспитания и личностного развития. Ведь именно в младшем и подростковом возрасте у детей велика потребность взаимоотношения со взрослыми. Для результативной работы по данной программе, используются технологии и методики работы, которые позволяют раскрывать личностные внутренние и скрытые ресурсы через ситуации успеха. Необходимо постоянно помогать ребятам в познании себя, самопонимании, развитии способности ставить перед собой цели и задачи и добиваться успеха. А главное управлять собой, своими желаниями и поведением в социуме.

Независимо от того, какой вид наставничества выбран, оно должно быть в форме содружества и сотворчества старших (наставников) и младших (подопечных). Наставничество служит для накопления и передачи опыта, приучает к уважению старших, способствует созданию условий для преемственности поколений.

Критерии оценки достижения планируемых результатов

Оценка достижения планируемых результатов освоения программы осуществляется по трем уровням: высокий (от 80 до 100% освоения программного материала), средний (от 51 до 79% освоения программного материала), низкий (менее 50% освоения программного материала).

Уровни освоения	Результат
Высокий уровень освоения программы	Обучающиеся демонстрируют высокую заинтересованность в учебной, познавательной и творческой деятельности, составляющей содержание программы. На итоговом тестировании показывают отличное знание теоретического материала, практическое применение знаний воплощается в качественный продукт...
Средний уровень освоения программы	Обучающиеся демонстрируют достаточную заинтересованность в учебной, познавательной и творческой деятельности, составляющей содержание программы. На итоговом тестировании показывают хорошее знание теоретического материала, практическое применение знаний воплощается в продукт, требующий незначительной доработки.
Низкий уровень освоения программы	Обучающиеся демонстрируют низкий уровень заинтересованности в учебной, познавательной и творческой деятельности, составляющей содержание программы. На итоговом тестировании показывают недостаточное знание теоретического материала, практическая работа не соответствует требованиям.

Формы подведения итогов

Для подведения итогов в программе используются продуктивные формы: олимпиады, конкурсы; документальные формы подведения итогов реализации программы отражают достижения каждого обучающегося, к ним относятся: дневники достижений обучающихся, портфолио обучающихся и т.д.

2. Учебный план

I год обучения

Форма организации образовательного процесса первого года обучения является модульной. Содержание учебного материала состоит из 3 модулей: «Увлекательная алгебра», «Статистика и теория вероятностей», «Геометрический калейдоскоп». Каждый из модулей имеет свою специфику и направлен на решение своих собственных целей и задач. Обучение рассчитано на полную реализацию в течение одного года. Модуль разработан с учётом личностно – ориентированного подхода и составлен так, чтобы каждый ребенок имел возможность свободно выбрать конкретный объект работы, наиболее интересный и приемлемый для него.

№ п/п	Наименование модуля	Количество часов		
		теория	практика	всего
1.	Увлекательная алгебра	8	56	64
2.	Статистика и теория вероятностей	4	60	64
3.	Геометрический калейдоскоп	2	14	16
Итого:		14	130	144

3. Содержание программы

1. Модуль «Математика для любознательных»

Цель модуля:

Создание условий для развития творческого математического мышления и творческой активности обучающихся

Задачи модуля:

- развить познавательных интересов и интеллектуальных способностей в процессе решения задач;
- поддержать любознательность ребят;
- вызвать интерес учащихся к предмету;
- способствовать развитию математического кругозора

Форма контроля:

- решенный тест по данному модулю

Учебно-тематический план модуля «Увлекательная алгебра»

№ п/п	Наименование тем	Количество часов		
		всего	теория	практика
1.	Вводное занятие. Техника безопасности.	2	2	-
2.	История возникновения алгебры (просмотр презентации). Решение олимпиадных задач	2	2	-
3.	Числовые и алгебраические выражения	2	-	2
4.	Математический язык. Решение олимпиадных задач.	2	-	2
5.	Математические софизмы.	2	-	2
6.	Логика в математике. Классическая логика	2	-	2
7.	Математическое моделирование.	2	-	2
8.	Решение олимпиадных задач.	2	-	2
9.	Теоремы Ньютона. Математические софизмы.	2	-	2
10.	Математические софизмы. Великие математики	2	-	2

11.	Геометрическое моделирование.	2	-	2
12.	Решение олимпиадных задач. Великие математики	2	-	2
13.	Моделирование в алгебре и геометрии	2	-	2
14.	Решение задач с практическим содержанием.	2	-	2
15.	Метод координат. Великие математики.	2	-	2
16.	Проценты в математике. Понятие процента. Решение задач на проценты.	2	2	-
17.	Проценты в бизнесе, экономике и в банковском деле.	2	-	2
18.	Решение задач на «смеси», «сплавы» и «концентрацию»	2	-	2
19.	Задачи на среднюю скорость движения. Движение по реке.	2	-	2
20.	Равномерное и равноускоренное движение по прямой в одном направлении и навстречу друг другу	2	-	2
21.	Графический способ решения задач на движение. Историческая справка о Р. Декарт	2	-	2
22.	Задачи на совместную работу	2	-	2
23.	Задачи на части	2	-	2
24.	Задачи на разбавление	2	-	2
25.	Задачи на движение по окружности	2	-	2
26.	Развитие понятия уравнения. Исторический очерк.	2	-	2
27.	Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне, диофантовы уравнения в Индии, у Ал-Хорезми в Европе 13-17в. Теорема Виета. Биография Виета.	2	-	2
28.	Основные методы решения рациональных уравнений	2	-	2
29.	Основные приемы решения систем уравнений	2	-	2
30.	Решение занимательных задач	2	-	2
31.	Математический калейдоскоп	2	-	2
32.	Заключительное занятие.	2	2	-
Итого:		64	8	56

Содержание программы первого модуля

Тема занятия №1. Вводное занятие. Техника безопасности.

Теория: Знакомство обучающихся с программой модуля. Правила обучающихся в образовательном учреждении. Изучение инструкций по технике безопасности и пожарной безопасности.

Тема занятия № 2. История возникновения алгебры (просмотр презентации). Решение олимпиадных задач.

Теория: История возникновения алгебры:

- Древний Восток. В ранних математических текстах встречаются простейшие алгебраические операции — арифметические действия над натуральными числами и дробями. Ещё в 1650 году до н. э. египетские писцы могли решать отвлечённые уравнения первой степени и простейшие уравнения второй степени.

- Древняя Греция. Теоретические исследования абстрактной алгебры начали появляться в Древней Греции в IV веке. Эти исследования представляли собой аналитические рассуждения о свойствах чисел и операций.
- Арабский вклад. Само слово «алгебра» имеет арабское происхождение. Оно происходит от названия трактата «Аль-китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джабр ва-ль-мукабала» (Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы), написанного персидским математиком аль-Хорезми в IX веке.
- Европа. Перевод труда аль-Хорезми на латинский язык способствовал распространению алгебры в Европе и её дальнейшему совершенствованию. В XVI веке в Европе были открыты способы решения уравнений 3 и 4 степеней.
- XIX век. Эварист Галуа разработал теорию групп, изучая разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Это привело к созданию абстрактной алгебры, которая изучает алгебраические структуры сами по себе, независимо от их конкретной природы.

Тема занятия №3. Числовые и алгебраические выражения

Практика: Числовые и алгебраические выражения — два основных вида математических выражений. Они различаются составом и назначением.

Числовые выражения

Числовое выражение состоит из чисел и знаков арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). Также могут содержать скобки для указания порядка действий.

Значение числового выражения — число, полученное в результате выполнения всех действий по порядку.

- $5 + 9$;
- $12 - 4$;
- $6 * 7$;
- $20 / 4$.

Более сложные числовые выражения могут содержать несколько действий: например, $(5 * 3) - (5 * 2)$, $6 / (7 - 4)$.

При вычислении сложных числовых выражений нужно соблюдать очередность действий:

1. Сначала выполняется действие, записанное в скобках.
2. Затем — действия деления и умножения слева направо.
3. В последнюю очередь — действия сложения и вычитания слева направо.

Алгебраические выражения

Алгебраическое выражение (буквенное выражение) состоит из букв (преимущественно из латинского алфавита) и знаков арифметических действий, а также может содержать числа и скобки. Буквы в таком выражении называются переменными, так как они могут принимать разные числовые значения.

Значение алгебраического выражения можно найти, если известны значения переменных.

Например, если подставить вместо переменных числа, то выражение превратится в числовое, и его значение можно будет вычислить.

- $4a + 5$;
- $6b - 8$;
- $5c / 6 * (8 + 5)$.

Тема занятия № 4. Математический язык. Решение олимпиадных задач.

Практика: Олимпиадные задачи условно можно подразделить на два класса:

1. Близкие к школьному курсу математики. Они углубляют и дополняют такие темы, как делимость чисел, многочлены, функции, уравнения и неравенства, различные разделы геометрии и другие.

2. Не относящиеся к определённому разделу математики. Для их решения нужно умение рассуждать, догадываться, выстраивать логику доказательства.

Некоторые типы олимпиадных задач: числовые ребусы, задачи на взвешивание и переливание, логические задачи, задачи на движение или работу, задачи на раскраску или разрезание и другие.

Несколько советов по решению олимпиадных задач:

- Прочитать условия всех задач и наметить порядок их решения. Обычно задачи упорядочены по возрастанию их трудности.
- Если условие можно понять разными способами, не выбирать самый удобный для себя, а обратиться к дежурному с вопросом.
- Если задача решается слишком легко, возможно, неправильно понято условие или допущена ошибка.
- Если задача не решается, попробовать её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т. д.) или решить её «от противного», или заменить числа буквами и т. д..
- Если неясно, верно ли некоторое утверждение, то пытаться его поочерёдно то доказывать, то опровергать.
- Не заикливаться на одной задаче: иногда отрываться от неё и оценивать положение.

Тема занятия № 5. Математические софизмы.

Практика: Математический софизм — ошибочное утверждение, полученное с помощью рассуждений, которые кажутся правильными, но в действительности содержат ту или иную ошибку. Причины ошибки могут быть разнообразными: применение запрещённых в математике действий (например, деление на ноль), неточное использование законов или использование вне зоны их применимости, логические ошибки и т. д..

Примеры

Некоторые примеры математических софизмов:

- «Дважды два — пять». Исходное равенство: $4:4 = 5:5$. После вынесения за скобки общего множителя из каждой части равенства получается: $4 \cdot (1:1) = 5 \cdot (1:1)$ или $(2 \cdot 2)(1:1) = 5(1:1)$. Наконец, зная, что $1:1 = 1$, получается: $2 \cdot 2 = 5$. Ошибка — нельзя выносить множитель за скобки так, как было сделано (распределительный закон умножения применяется только для сложения и вычитания).
- «Один рубль не равен ста копейкам». Известно, что 1 рубль = 100 копеек, 10 рублей = 10 · 100 копеек. Перемножая эти равенства почленно, получается 10 рублей = 100 000 копеек. Затем, разделив последнее равенство на 10, получается 1 рубль = 10 000 копеек. Ошибка — нарушение правил действия с именованными величинами: все действия, совершаемые над величинами, необходимо совершать также и над их размерностями.

Тема занятия № 6. Логика в математике. Классическая логика.

Практика: Классическая логика — раздел современной (математической, символической) логики, который изучает законы и формы мышления, используемые в математических рассуждениях.

Ключевой принцип классической логики — двужначность: любое высказывание может быть истинным или ложным.

История классической логики

Основы классической логики были заложены в конце XIX — начале XX веков. Вклад внесли такие учёные, как Дж. Буль, О. де Морган, Г. Фреге, Ч. Пирс.

В XX веке математическая логика оформилась в качестве самостоятельной дисциплины в рамках логической науки.

Основные разделы

Классическая логика включает:

- Логику высказываний (пропозициональную логику) — изучает сложные высказывания, образованные из простых, и их взаимоотношения.

- Логику предикатов — исследует предложения произвольной длины, утверждающие или отрицающие какой-либо отдельный факт или всеобщее явление в зависимости от значений элементов, формирующих структуру предложения.

Применение

Классическая логика играет важную роль в решении математических задач, где необходимо идентифицировать истинные утверждения и отметить ложные.

Также фундаментальные принципы классической логики (закон тождества, закон исключённого третьего, закон противоречия, закон достаточного основания) определяют требования к рассуждениям: определённость, ясность, непротиворечивость, последовательность, обоснованность.

Примеры

Некоторые примеры использования классической логики в математике:

- Доказательство «от противного». Вид доказательства, при котором «доказывание» некоторого суждения осуществляется через опровержение отрицания этого суждения — антитезиса. Этот способ доказательства основывается на истинности закона двойного отрицания в классической логике.
- Построение силлогизмов. Классические силлогизмы — схемы рассуждений, позволяющие из истинности двух предложений выводить истинность некоторого третьего предложения. Например: «Все люди смертны. Сократ человек. Следовательно, Сократ смертен».

Тема занятия № 7. Математическое моделирование.

Практика: Математическое моделирование — это метод исследования, при котором реальный объект, процесс или явление заменяется его математической моделью, позволяющей анализировать поведение системы с использованием математических методов.

Математическая модель — это описание какого-либо объекта, явления или процесса с использованием математических понятий, символов, формул и уравнений. Она выражает основные свойства и связи объекта или процесса на языке математики.

Этапы построения модели

Процесс построения математической модели включает несколько этапов:

1. Формулировка задачи. Определение целей моделирования и постановка задачи.
2. Сбор данных и анализ. Сбор необходимых данных и анализ условий задачи.
3. Выбор типа модели. Решение о том, какой тип модели будет наиболее подходящим.
4. Построение модели. Разработка математического описания системы.
5. Верификация и валидация. Проверка модели на адекватность и соответствие реальным данным.
6. Анализ чувствительности и неопределённости. Оценка влияния изменений параметров на поведение модели.

Виды математического моделирования

Математические модели классифицируют по разным критериям, например:

- По способу описания: детерминированные и стохастические (вероятностные).
- По характеру времени: статические и динамические.
- По характеру переменных: дискретные и непрерывные.
- По степени детализации: макроскопические, микроскопические, мезоскопические.
- По используемому аппарату: аналитические, численные, имитационные.

Тема занятия № 8. Решение олимпиадных задач.

Практика: Решение олимпиадных задач требует нестандартного подхода, творческого мышления и логического рассуждения. Как правило, способ решения не находится в числе уже освоенных, приходится комбинировать знания и способы, а порой изобретать новые, нетривиальные.

Методы решения

Некоторые методы решения олимпиадных задач:

- Анализ условий. Нужно понять, почему вход соответствует выходу, выявить круг идей.
- Упрощение условия. Если задача не решается, можно взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи.
- Решение «от противного». Если неясно, верно ли утверждение, его можно поочерёдно доказывать и опровергать.
- Замена чисел буквами. Это помогает найти решение, если задача связана с числовыми данными, но сами числа не используются в условии.
- Использование математических моделей. Например, рассмотрение примера входных и выходных данных помогает понять, почему вход соответствует выходу.

Примеры задач

Некоторые примеры олимпиадных задач и их решения:

- Задача на разрезание фигуры из 5 квадратов. Нужно разрезать фигуру на части, из которых можно сложить ровно один квадрат. Решение: можно использовать метод деления на части, где каждая из них — квадрат, и сложить из них один квадрат.
- Задача на порции мороженого. Пока Чебурашка ест две порции, Винни-Пух — пять таких же порций, а пока Винни-Пух ест три порции, Карлсон — семь. Вместе Чебурашка и Карлсон съели 82 порции. Нужно найти, сколько порций за это время съел Винни-Пух. Решение: можно найти наименьшее общее кратное чисел 3 (через него Винни-Пух соотносится с Карлсоном) и 5 (через него Винни-Пух соотносится с Чебурашкой) — 15. Когда Винни-Пух съест 15 порций мороженого, Чебурашка съест $2 \times 3 = 6$ порций, а Карлсон — $7 \times 5 = 35$ порций. Вместе они съедят $6 + 35 = 41$ порцию. 82 порции мороженого они будут есть в два раза дольше, поэтому Винни-Пух успеет съесть за это же время в 2 раза больше порций: $15 \times 2 = 30$.

Тема занятия № 9. Теоремы Ньютона. Математические софизмы.

Практика: Теоремы Ньютона

Теоремы Ньютона (законы механики) описывают взаимосвязь между движением объекта и действующими на него силами. Они сформулированы в 1687 году и положены в основу классической механики.

Некоторые законы Ньютона:

- Первый закон (закон инерции): тело продолжает находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока силы не заставят его изменить это состояние.
- Второй закон: ускорение тела прямо пропорционально силе, действующей на него, и обратно пропорционально его массе.
- Третий закон (закон равенства действия и противодействия): при взаимодействии двух тел возникает пара сил, равных по величине и противоположных по направлению.



Математические софизмы

Математический софизм — ошибочное математическое утверждение, полученное с помощью рассуждений, которые кажутся правильными, но в действительности содержат ошибку.

Причины ошибок в софизмах:

- применение запрещённых в математике действий (например, деление на ноль);
- неточное использование математических законов или использование вне зоны их применимости;
- логические ошибки.

Софизмы могут быть разных видов, например: арифметические, алгебраические, геометрические.



Разбор ошибок

Разбор математических софизмов помогает развивать логическое мышление и предотвращать типичные ошибки в математических рассуждениях. Например, анализ софизма «Спичка длиннее, чем телеграфный столб, причём вдвое» показывает, как ошибка в вычислениях приводит к абсурдному результату.

Тема занятия № 10. Математические софизмы. Великие математики.

Практика: Математические софизмы — это ошибочные утверждения, полученные с помощью рассуждений, которые кажутся правильными, но в действительности содержат ошибку.

История возникновения

Математические софизмы появились в Древней Греции и связаны с философской деятельностью софистов — учителей философии, логики и риторики. Софисты разрабатывали логические, риторические и психологические приёмы, включая софизмы, чтобы научить человека доказывать (подтверждать или опровергать) всё, что угодно.

Первый сборник математических софизмов и парадоксов («Псевдариий») создал древнегреческий математик Евклид (IV век до н. э.). В нём он поместил разнообразные ошибочные рассуждения, чтобы помочь начинающим изучать математику.

Виды математических софизмов

Некоторые виды математических софизмов:

- Арифметические — числовые выражения с ошибкой, незаметной с первого взгляда.
- Алгебраические — намеренно скрытые ошибки в уравнениях и числовых выражениях.
- Геометрические — умозаключения или рассуждения, обосновывающие абсурдное утверждение, связанное с геометрическими фигурами и действиями над ними.

Примеры математических софизмов

Несколько примеров математических софизмов:

- «Два умножить на два будет пять». Используется верное равенство: $4:4 = 5:5$, из которого выносится общий множитель. Ошибка допущена при вынесении множителя за скобки — распределительный закон умножения применяется только для сложения и вычитания.
- «Один рубль равен 10 000 копеек». Берется верное равенство: 1 рубль = 100 копеек, которое возводится в квадрат. Ошибка — возведение в квадрат величин не имеет смысла, в квадрат возводятся только числа.
- «Спичка вдвое больше, чем телеграфный столб». Пусть a — длина спички, b — длина столба. Разность между ними обозначим через c . Затем записываются два уравнения: b

— $a = c$, $b = a + c$. После перемножения этих уравнений получается абсурдное утверждение, что спичка вдвое длиннее столба. Ошибка — деление на выражение, которое равно нулю.

Роль математических софизмов в развитии математики

Математические софизмы играли важную роль в развитии математики, так как:

- Способствовали повышению строгости в рассуждениях. Софизмы заставляли внимательно следить за точностью формулировок, правильностью записей, законностью математических операций.
- Содействовали более глубокому уяснению понятий и методов. Разбор софизмов помогал осознать ошибку и предотвратить её повторение в других математических рассуждениях.
- Подготовили новые открытия. История математики полна неожиданных и интересных софизмов, разрешение которых порой служило толчком к новым открытиям.

Тема занятия № 11. Геометрическое моделирование.

Практика: Геометрическое моделирование — это процесс создания и использования геометрических моделей для представления объектов и систем в компьютерной графике и инженерии. Оно использует математические и геометрические принципы для описания формы, размера и положения объектов.

История развития

Некоторые этапы развития геометрического моделирования:

- Древние цивилизации. Геометрия использовалась для решения практических задач, например, при строительстве зданий, дорог, акведуков.
- Евклидова геометрия. Основой для описания предметов стала геометрическая теория, основанная на системе аксиом, изложенной в «Началах» Евклида.
- Начертательная геометрия и проекционное черчение. Развитие идей Евклидовых построений сформировало эти методы.
- Введение систем координат Декартом. Позволило соединить геометрию с аналитической математикой, открыло возможность получать новые геометрические объекты путём решения алгебраических уравнений.
- Распространение компьютерных технологий. В конце XX века использование вычислительной техники позволило строить трёхмерные геометрические объекты, что сделало модели более наглядными и информативными.

Основные понятия

Некоторые ключевые понятия геометрического моделирования:

- Кривые — линии, которые используются для представления формы объекта. Могут быть созданы с помощью математических функций или точек, соединённых линиями.
- Поверхности — двумерные объекты, которые представляют форму объекта в трёхмерном пространстве. Могут быть созданы с помощью кривых или математических функций.
- Тела — трёхмерные объекты, которые используются для представления реальных объектов. Тела могут быть созданы с помощью поверхностей или других тел.

Применение

Геометрическое моделирование применяется в различных областях, например:

- Архитектура и строительство. Создание визуальных моделей зданий и сооружений, планирование и проектирование.
- Машиностроение и производство. Создание 3D-моделей деталей и сборочных единиц, проектирование и оптимизация производственных процессов.
- Авиация, автомобилестроение, судостроение. Проектирование и анализ форм и кузовов автомобилей, корпусов судов.

- Медицина и биология. Создание моделей органов и тканей для медицинских и биологических исследований, а также для планирования и проведения хирургических операций.
- Дизайн и искусство. Создание визуальных моделей и арт-объектов, разработка дизайна продуктов и интерьеров.
- Морское моделирование. Моделирование водной поверхности и форм подводного мира, берегов морей и рек.

Методы и алгоритмы

В геометрическом моделировании используются, например:

- Численные методы. Например, создание моделей с помощью графических примитивов (точек, линий, поверхностей), которые трансформируются программными средствами.
- Аналитические методы. Позволяют задать геометрические объекты в аналитическом виде, исследовать их свойства и анализировать поведение.

Тема занятия № 12. Решение олимпиадных задач. Великие математики.

Практика: Примеры задач

Некоторые примеры заданий из олимпиады «Великие математики»:

- Задание на выбор направления, за которое не присуждается Нобелевская премия. Участникам предлагается выбрать между литературой, химией, содействием в установлении мира и математикой. Правильный ответ — математика, так как именно это направление не входит в список номинантов Нобелевской премии.
- Задача на расчёт количества бананов, съеденных героями сказки. Вини-Пух, Сова, Кролик и Пятачок вместе съели 70 бананов, причём каждый из них съел хотя бы один банан. Вини-Пух съел больше всех, Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

Тема занятия № 13. Моделирование в алгебре и геометрии

Практика: Моделирование — метод исследования каких-либо явлений, процессов или систем объектов, который предполагает создание искусственных или естественных систем (моделей), имитирующих существенные свойства оригинала.

В алгебре моделирование заключается в решении практических задач с помощью уравнений, построении графиков, систем неравенств (уравнений) и других действиях. Например, уравнения выступают в качестве моделей окружности, эллипса, параболы и гиперболы, а эти кривые, в свою очередь, можно рассматривать как геометрические модели указанных уравнений.

В геометрии моделями будут являться различные построения фигур и объёмных тел. Любые виды моделирования помогают школьникам с выполнением чертежей и способствуют развитию пространственного мышления.

Связь алгебры и геометрии заключается в том, что алгебраический метод решения геометрических задач популярен из-за лёгкости построения алгебраической модели геометрической задачи и известности алгоритма её решения. Геометрическое моделирование алгебраической задачи, в свою очередь, требует искусного владения геометрическим материалом и предполагает уже геометрическое решение новой задачи. Таким образом, моделирование в алгебре и геометрии связано с созданием математических моделей, которые помогают изучать свойства объектов и решать различные задачи.

Тема занятия № 14. Решение задач с практическим содержанием.

Практика: Решение задач с практическим содержанием (практико-ориентированных задач) направлено на формирование умений применять математические знания в реальных ситуациях. Такие задачи помогают раскрыть применение математики в смежных дисциплинах, в производстве, в быту.

Этапы решения

Решение задач с практическим содержанием включает несколько этапов:

1. Анализ условия задачи. Задача формулируется на описательном языке, выделяются известные данные и искомые величины.
2. Построение математической модели. Исходная задача переводится на математический язык.
3. Решение математической модели. Если задача известная, она решается по соответствующему алгоритму. Если задача никогда не решалась, ищется необходимый алгоритм.
4. Интерпретация решения. Решение переводится на исходный язык, чтобы объяснить ответ в контексте задачи.

Методы решения

Некоторые методы решения задач с практическим содержанием:

- Арифметический. Все логические операции проводятся над конкретными числами, основой рассуждения является знание смысла арифметических действий.
- Алгебраический. Составляется уравнение (система уравнений), решение которого основано на свойствах уравнений.
- Комбинированный. Включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

Примеры задач

Некоторые примеры задач с практическим содержанием:

- Геометрические задачи. Например, нахождение площадей и объёмов фигур, расчёты и измерения для строительства, дизайна или архитектуры.
- Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию. Могут включать расчёты времени или дистанции, финансовые расчёты, задачи на пропорциональное распределение.
- Задачи на движение. Например, движение лодки, катера по реке, движение автомобиля, пешехода по дороге.

Тема занятия № 15. Метод координат. Великие математики.

Практика: Метод координат позволяет строить графики уравнений, изображать геометрически различные зависимости, выраженные с помощью уравнений и формул.

Некоторые великие математики, связанные с развитием метода координат:

- Рене Декарт (1596–1650). Французский математик, философ и естествоиспытатель. В 1637 году в труде «Рассуждение о методе» он впервые сделал научное описание прямоугольной системы координат. В честь Декарта система координат называется декартовой.
- Пьер Ферма (1601–1665). Соотечественник Декарта, внёс вклад в развитие координатной системы. Первая работа, содержащая описание системы координат и использование этого метода при решении задач, — «Введение в учение о плоских и телесных местах».
- Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). В конце XVII века он первым начал использовать слова «абсцисса», «ордината», «координаты».
- Леонард Эйлер. В XVIII веке он впервые применил координатный метод в трёхмерном пространстве.

Тема занятия № 16. Проценты в математике. Понятие процента. Решение задач на проценты.

Теория: Процент в математике — это сотая часть любого числа. Процент обозначается знаком «%»

Некоторые типы задач на проценты и способы их решения:

- Нахождение процента от числа. Пример: за месяц на предприятии изготовили 500 приборов, 20% из них не смогли пройти контроль качества. Нужно найти 20% от общего количества изготовленных приборов (500). $20\% = 0,2$, $500 * 0,2 = 100$.

- Нахождение числа по его проценту. Пример: 12 учеников из класса получили оценку «5», эти ученики составляют 30% от всех учеников класса. Нужно найти общее количество учеников. Если 30% — это 12 учеников, тогда 1% от всех учеников класса будет равен $12/30 = 0,4$, следовательно, 100% от всех учеников класса, то есть их общее количество, будет равно $0,4 * 100 = 40$.
- Нахождение процентного отношения двух чисел. Пример: в классе 30 учеников, 14 из них — девочки. Нужно найти, какой процент девочек в классе. Для этого число, которое требуется найти, нужно разделить на общее количество и умножить на 100%. $14/30 * 100\% = 7/15 * 100\% = 7 * 100\%/15 = 47\%$.

Расчёт увеличения числа на процент. Если рост числа показан в процентах и требуется найти итоговое значение, необходимо исходное число умножить на заданный процент, а полученный результат добавить к исходному числу. Пример: необходимо узнать, какова стала зарплата после увеличения на 10% от исходного значения в 150 рублей. Решение: $150 * 10\% = 15$ рублей, $150 + 15 = 165$ рублей.

Тема занятия № 17. Проценты в бизнесе, экономике и в банковском деле.

Практика: Проценты в бизнесе и экономике используются в различных расчётах, например, для определения скидок, наценок, прибыли, кредитов, налогов. Проценты также могут относиться к размеру собственности акционера в компании.

В банковском деле проценты связаны с кредитами, вкладами, сберегательными счетами и другими финансовыми операциями. Процентная ставка по вкладам и кредитам устанавливается конкретным банком. При ставках на кредиты банки опираются на ключевую ставку — это минимальный процент, под который коммерческие банки могут взять кредит в Центробанке.

Существуют разные виды процентов, например:

- Простые. Процент начисляется только на сумму кредита или вклада.
- Сложные. Процент начисляется на сумму вклада плюс на весь полученный до этого процентный доход. То есть проценты сами участвуют в начислении новых процентов.

Проценты часто связаны с кредитными картами, ипотекой, автокредитами, частными займами и другими финансовыми инструментами.

Тема занятия № 18. Решение задач на «смеси», «сплавы» и «концентрацию»

Практика: Алгоритм решения задач на смеси, сплавы и концентрацию:

1. Определить, какое вещество влияет на концентрацию раствора (главное вещество).
2. Следить за весом главного вещества при добавлении других веществ в раствор.
3. Исходя из данных об изменениях состояния главного вещества, сделать выводы.

Некоторые методы решения таких задач:

- Использование таблиц. В таблице указывают наименование веществ, их процентное содержание, массу раствора (смеси, сплава) и массу вещества.
- Составление уравнения или системы уравнений. Неизвестные величины обозначают буквами (х, у и т. д.) и создают математическую модель ситуации, описанной в условии задачи.
- Применение правила «квадрата Пирсона». Рисуют квадрат и проводят две диагонали. В левом верхнем углу проставляют больший показатель крепости исходных веществ, в нижнем углу — меньший, а на пересечении диагоналей записывают требуемый показатель.
- Использование диагональной схемы правила смешения. Записывают одну над другой массовые доли растворённого вещества в исходных растворах, справа между ними — его массовую долю в растворе, который нужно приготовить, и вычитают по диагонали из большего меньшее значение.

Некоторые допущения, которые используют при решении задач о смесях, сплавах, растворах: все полученные смеси, сплавы, растворы считаются однородными, смешивание различных растворов происходит мгновенно, объём смеси равен сумме объёмов смешиваемых растворов, объёмы растворов и массы сплавов не могут быть отрицательными.

Тема занятия № 19. Задачи на среднюю скорость движения. Движение по реке.

Практика: Задача на среднюю скорость движения: поезд 3 часа шёл со скоростью 63,2 км/ч и 4 часа со скоростью 76,5 км/ч. Нужно найти среднюю скорость поезда на всём пути.

Решение: 1) $63,2 \times 3 = 189,6$ км — путь, пройденный за 3 часа. 2) $76,5 \times 4 = 306$ км — путь, пройденный за 4 часа. 3) $3 + 4 = 7$ часов — затраченное время. 4) $189,6 + 306 = 495,6$ км — весь пройденный путь. 5) $495,6 : 7 = 70,8$ км/ч — средняя скорость.

Задача на движение по реке: катер прошёл 20 км по течению реки и 12 км против течения, затратив на весь путь 4 часа. Нужно найти собственную скорость катера, если скорость течения равна 2 км/ч.

Решение: 1) $20 + 12 = 32$ км — весь путь катера. 2) $32 : 4 = 8$ км/ч — средняя скорость катера.

В задачах на движение по реке обычно говорится о собственной скорости плавучего объекта и скорости течения. Скорость при движении по течению равна сумме собственной скорости судна и скорости течения, а при движении против течения — разности собственной скорости судна и скорости течения.

Тема занятия № 20. Равномерное и равноускоренное движение по прямой в одном направлении и навстречу друг другу.

Практика: Равномерное прямолинейное движение — это движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения. Скорость равномерного прямолинейного движения — это отношение перемещения ко времени, за которое это перемещение произошло.

Равноускоренное прямолинейное движение — это движение, при котором мгновенная скорость за любые равные промежутки времени изменяется на одну и ту же величину. Ускорение при таком движении показывает, на сколько метров в секунду увеличивается (или уменьшается) начальная скорость тела каждую секунду движения.

Тема занятия № 21. Графический способ решения задач на движение. Историческая справка о Р. Декарт

Практика: Графический способ решения задач на движение и метод координат, впервые применённый Рене Декартом, связаны.

Рене Декарт (1596–1650) — французский математик и философ, основоположник аналитической (координатной) геометрии. Его работа «Геометрия» (1637) изложила основы этого метода, который связал геометрические и алгебраические понятия.

Графический способ решения задач

Графический способ решения задач на движение заключается в построении графика, который отражает процесс движения. Для этого вводят систему координат: на оси абсцисс откладывают время, на оси ординат — пройденное расстояние.

Пример решения задачи на движение графическим методом:

1. Из двух городов, расстояние между которыми равно 200 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов они встретятся, если их скорости равны 40 км/ч и 60 км/ч?

Решение:

- Начертить шаблон графика, для оси пути взять масштаб 1:20 (1 клетка к 20 км).
- Отметить на координатной плоскости точки, соответствующие положению автомобилей через 1 час: первый автомобиль — 40 км, второй — 140 км (200 км – 60 км).
- Провести прямые через эти точки.

- Найти точку пересечения прямых — она отображает время встречи и расстояние от городов.
- Опустить перпендикуляр на ось времени: он падает на отметку 2 часа, значит, автомобили встретятся через 2 часа.



Метод Декарта

Метод координат, разработанный Декартом, позволяет каждому геометрическому соотношению ставить в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тела. Это позволило установить тесную связь между алгеброй и геометрией.

Декарт подчеркнул, хотя и не доказал, что основные характеристики кривой не зависят от выбора системы координат. Система координат у него была перевернута по сравнению с современной (ось ординат горизонтальна), и отрицательные координаты не рассматривались.

Тема занятия № 22. Задачи на совместную работу.

Практика: Решаем задачи.

Тема занятия № 23. Задачи на части.

Практика: Задачи на части — это задачи, в которых описана взаимосвязь между количеством предметов, при том что их точные значения неизвестны. В таких задачах величины состоят из частей, и нужно определить, сколько частей приходится на другую величину, или найти часть, которую одно число составляет от другого.

Виды задач

Некоторые виды задач на части:

- С явным представлением частей. В условии задачи части указаны явно, и нужно вычислить, сколько единиц приходится на одну часть, а затем определить, сколько таких частей в другой величине.
- С неявным представлением частей. В задаче слово «часть» не присутствует, но нужно выделить части, приняв подходящую величину за одну, и определить, из скольких таких частей состоят другие величины.

Примеры задач

- Задача на нахождение части от числа. Например, если известно, что за лето почтовый голубь съедает около 2 кг зёрен, а зимородок потребляет $5/2$ этого количества корма, нужно найти, сколько килограммов корма съест зимородок за лето.
- Задача на нахождение числа по его части. Например, если зимородок съедает около 5 кг мелкой рыбы, что составляет $5/2$ всего корма, который употребит почтовый голубь, нужно найти, сколько килограммов корма съест почтовый голубь за лето.
- Задача на нахождение части, которую одно число составляет от другого. Например, если почтовый голубь съедает около 2 кг зёрен, а зимородок — около 5 кг мелкой рыбы, нужно найти, какую часть составляет съедаемый зимородком корм от того количества корма, который употребит почтовый голубь.

Задачи на части решаются с помощью уравнений, пропорций или систем уравнений. Для этого необходимо:

1. Определить целое число и его части.
2. Записать условие задачи в виде уравнения или системы уравнений.
3. Решить уравнение или систему, используя известные соотношения между частями.
4. Проверить решение, подставив найденные значения в исходное уравнение или систему.

Тема занятия № 24. Задачи на разбавление.

Практика: Задачи на разбавление связаны с уменьшением концентрации вещества за счёт добавления растворителя. В таких задачах требуется найти массу или концентрацию вещества в разбавленном растворе.

Примеры задач

- К 200 г 15%-го раствора хлорида натрия добавили 40 г воды. Нужно определить массовую долю соли в полученном растворе.
- 40 г гидроксида натрия растворили в 500 мл колбе. Затем отобрали аликвоту пипеткой 50 мл и перенесли в колбу объёмом 250 мл, добавив до уровня воду. Какая концентрация гидроксида натрия будет в разбавленном растворе?

Методы решения

При решении задач на разбавление важно учитывать, что масса растворённого вещества остаётся неизменной, изменяется лишь масса растворителя и, соответственно, масса всего раствора.

Некоторые методы решения:

- Диагональный (метод креста). Массовые доли веществ записывают друг под другом, по диагонали из большей доли вычитают меньшую, затем находят равенство отношений масс и полученных долей.
- Алгебраический. Масса вещества рассматривается как произведение массы раствора и массовой доли вещества в растворе.

Тема занятия № 25. Задачи на движение по окружности.

Практика: Задачи на движение по окружности могут быть разными: на вычисление скорости, времени или пути, а также задачи с двумя объектами, движущимися по кругу.

Основные формулы

Для решения задач на движение по окружности часто используют следующие формулы:

- Скорость = путь / время ($v = S / t$), где v — скорость, S — путь, пройденный по окружности, t — время.
- Время = путь / скорость ($t = S / v$), где S — путь, v — скорость.
- Длина окружности = $2\pi r$, где r — радиус.
- Угловая скорость = линейная скорость / радиус ($\omega = v / R$).

Примеры задач

Некоторые примеры задач на движение по окружности:

- Автомобиль проехал по кругу длиной 200 метров за 50 секунд. Какова его скорость?
Решение: $v = 200 \text{ метров} / 50 \text{ секунд} = 4 \text{ метра в секунду}$.
- Мотоцикл движется со скоростью 15 м/с. Какое время потребуется, чтобы проехать круг длиной 300 метров? Решение: $t = 300 \text{ метров} / 15 \text{ м/с} = 20 \text{ секунд}$.

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

Тема занятия № 26. Развитие понятия уравнения. Исторический очерк.

Практика: Древний мир

- В Древнем Вавилоне решали линейные и квадратные уравнения, используя геометрические методы. Это было вызвано необходимостью решать задачи, связанные с разделением земли и земельными работами.
- В Древнем Египте для решения уравнений первой степени использовали метод ложного положения («фальшивое правило»).

Древняя Греция

- Евклид в «Началах» описал геометрические методы решения уравнений.
- Диофант разработал методы решения алгебраических уравнений и систем таких уравнений со многими неизвестными в рациональных числах.

Средневековье

- Мухаммед аль-Хорезми дал классификацию уравнений первой и второй степеней, выделил шесть видов квадратных уравнений. Его трактат «Китаб аль-джебр валь-мукабала» стал основой для термина «алгебра».
- Омар Хайям в «Трактате о демонстрации задач алгебры» систематизировал решение кубических уравнений, найдя точки пересечения двух конических сечений.

Новое время

- Рене Декарт считал, что большинство математических задач можно свести к алгебраическим уравнениям или системе таких уравнений, а решение задачи заключалось в вычислении корней этих уравнений.
- Нильс Хенрик Абель опубликовал теорему, согласно которой общее уравнение выше четвёртой степени не решается в радикалах, и привёл конкретные примеры таких уравнений.
- Эварист Галуа показал, что алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда группа Галуа этого уравнения — разрешимая группа.

Тема занятия № 27. Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне, диофантовы уравнения в Индии, у Ал-Хорезми в Европе 13-17в. Теорема Виета. Биография Виета.

Практика: Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

В Древнем Вавилоне квадратные уравнения решали с помощью геометрических методов.

Учёные использовали клинописные тексты, в которых описаны задачи и их решения.

Например, в текстах встречались полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = 3/4$$

$$x^2 - x = 14,5$$

Однако в вавилонских текстах отсутствовали понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Ддиофантовы уравнения в Индии

В Индии с V–XII веков занимались решением неопределённых (диофантовых) уравнений первой степени. Уравнения такого рода (с двумя или тремя неизвестными) появились в связи с астрономическими расчётами.

Индийские учёные разработали методы решения диофантовых уравнений, например, Брахмагупта (около 625 года) описал способ получения общего решения уравнения вида

$$ax + by = c$$

где a , b , c — целые числа.

Диофантовы уравнения

$$2x + 3y = 5$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

У Ал-Хорезми в Европе

Среднеазиатский учёный Аль-Хорезми (IX век) внёс вклад в развитие алгебры. Он впервые представил алгебру как самостоятельную науку об общих методах решения линейных и квадратных уравнений, дал классификацию этих уравнений.

Трактат Аль-Хорезми — первая дошедшая до нас книга, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

Теорема Виета

Теорема Виета — открытие французского математика Франсуа Виета (1540–1603). Она связывает корни квадратного уравнения с его коэффициентами, что позволяет найти сумму и произведение корней без их непосредственного вычисления.

Формулы Виета для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Сумма корней:

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

- Произведение корней:

$$x_1 \times x_2 = c/a$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 - корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то справедливы формулы

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

egemot.ru

Биография Франсуа Виета

Франсуа Виет — французский математик, основоположник символической алгебры. Он ввёл использование букв для обозначения неизвестных и параметров, что упростило решение сложных математических задач.

Некоторые факты из биографии Виета:

- Родился в 1540 году в Фонтене-ле-Конт, во французской провинции Пуату.
- Учился в университете Пуатье, где получил степень бакалавра (1560).
- С 19 лет занимался адвокатской практикой в родном городе, в 1567 году перешёл на государственную службу.

- В 1571 году переехал в Париж, стал советником сначала короля Генриха III, а после его убийства — Генриха IV.
- Когда в результате придворных интриг Виет был на несколько лет отстранён от дел (1584–1588), он полностью посвятил себя математике.
- Главное своё сочинение — «Введение в аналитическое искусство» (1591) — Виет рассматривал как начало всеобъемлющего трактата, но продолжить не успел.

Тема занятия № 28. Основные методы решения рациональных уравнений.

Практика: Примеры решений

Пример решения рационального уравнения методом переноса неизвестных:

Уравнение: $\frac{5x+9}{2} = \frac{x}{4}$.

Решение: перенести все слагаемые в левую часть, чтобы справа остался ноль: $10x+18=x$.

Полученное уравнение — линейное, его корень $x=-2$.

Пример решения рационального уравнения методом группировки:

Уравнение: $x^3+2x^2+3x+6=0$.

Решение: вынести общие множители: $x^2(x+2)+3(x+2)=0$, затем разложить на множители: $(x+2)(x^2+3)=0$. После разложения нужно решить уравнения $x+2=0$ и $x^2+3=0$. Корень первого — $x=-2$, второе уравнение корней не имеет, поэтому $x=-2$ — окончательный ответ.

Пример решения рационального уравнения методом подстановки:

Уравнение: $x^2+x=y$.

Решение: ввести новую переменную y , получить уравнение, которое сводится к квадратному: $2y^2+3y-14=0$. Корни этого уравнения: $y_1=-3,5$, $y_2=2$. Затем вернуться к решению уравнения $x^2+x=y$ через подстановку найденных значений y .

Тема занятия № 29. Основные приемы решения систем уравнений.

Практика: Основные приёмы решения систем уравнений включают метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных и графический метод.

Метод подстановки.

Алгоритм решения системы уравнений методом подстановки:

1. Выразить одну переменную через другую из одного из уравнений системы.
2. Подставить полученное выражение в другое уравнение вместо выраженной переменной.
3. Решить полученное уравнение и найти значение одной из переменных.
4. Подставить найденное значение в одно из исходных уравнений, чтобы найти значение другой переменной.
5. Проверить решение, подставив найденные значения в оба уравнения системы.

Метод алгебраического сложения.

Суть метода — исключить одну из переменных из системы, сложив уравнения.

Алгоритм решения:

1. Выбрать одну из переменных, которую нужно исключить.
2. Если коэффициенты при выбранной переменной не равны или противоположны, умножить обе части уравнений на числа, при которых коэффициенты станут равными или противоположными.
3. Если коэффициенты равны, вычесть уравнения, если противоположны — сложить.
4. Привести подобные слагаемые, должно получиться линейное уравнение относительно другой переменной.
5. Решить полученное уравнение.
6. Подставить найденное значение вместо переменной в любое из исходных уравнений, найти значение другой переменной.

Тема занятия № 30. Решение занимательных задач.

Практика: Занимательные задачи могут быть разными: логическими, математическими или задачами на смекалку. Ниже приведены примеры решений для разных типов задач.

Логические задачи

- Задача на расположение объектов. Например, нужно расположить карандаши в определённом порядке, исходя из заданных условий. Решение может включать последовательные рассуждения или использование таблиц истинности.
- Задача на восстановление первоначальной картины. Известен результат определённых действий, а нужно восстановить первоначальные условия. Для решения можно использовать метод «с конца».
- Задача с перепутанными банками. На столе стоят три банки с надписями «Гречка», «Пшеника» и «Смесь», но названия перепутаны. Нужно достать крупу из банки с надписью «Смесь», так как все названия ложные, и найти ёмкость с гречкой методом исключения.

Тема занятия № 31. Математический калейдоскоп.

Практика: «Математический калейдоскоп» — название, которое может относиться к интеллектуальной игре или дидактической игре, связанной с математикой.

Слово «калейдоскоп» в контексте игры означает быструю смену разнообразных заданий, что отражает суть математических заданий, которые выполняются в игровой форме.



Описание игры

Игра «Математический калейдоскоп» может проводиться в разных формах, например:

- Внеклассное мероприятие. Участники отвечают на занимательные вопросы, решают задачи, отгадывают головоломки.
- Дидактическая игра для детей. Используются карточки с геометрическими фигурами и узорами, участники выполняют задания, передавая карточки по кругу.
- Настольная игра. Каждому игроку раздаётся карточка с цифрами, остальные карты ведущий поочерёдно кладёт в центр стола. Тот, кто быстрее заметит и назовёт цифру на центральной карточке, совпадающую с изображением на своей, забирает карточку себе. Игра продолжается, пока не будут разобраны все карточки в центре. Выигрывает тот, у кого больше карточек.

Примеры заданий

Некоторые примеры заданий из игры «Математический калейдоскоп»:

- «Математические задачки». Например, задачи на дни недели, задачи в стихах. За правильный ответ команда получает счётную палочку.
- «Собери пазлы». Каждой команде даются математические пазлы, кто быстрее соберёт, тот зарабатывает счётную палочку.
- «Состав числа». Каждой команде даётся по три числовых домика, в пустые окошки нужно поставить нужное число. Оценивается правильность постановки.
- «Пройди по плану». Командам даётся план, по которому они должны пройти и найти спрятанную геометрическую фигуру.

- «Скажи предметы, похожие на геометрическую фигуру». Каждой команде ведущий даёт по геометрической фигуре, например, круг и треугольник, участники должны назвать предметы, похожие на эти фигуры.

Тема занятия № 32. Заключительное занятие.

Теория: Подводим итоги.

Результат обучения по данному модулю

Обучающиеся:

- научились описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития алгебры как науки;
- научились приводить примеры математических открытий и их авторов в связи с всемирной и отечественной историей;
- научились понимать роль алгебры в развитии России.
- научились решать несложные текстовые задачи разных типов, в том числе задачи повышенной сложности и решать задачи с практическим содержанием
- научились анализировать условие задачи, строить для ее решения математическую модель, проводить доказательные рассуждения.

2. Модуль «Статистика и теория вероятностей»

Цель модуля:

расширить программу основной школы по изучению теории вероятности и элементов статистики

Задачи модуля:

- развить способность излагать свои мысли;
- связывать жизненные ситуации со статистическим материалом, формализовывать и описывать данные

Форма контроля:

- решенный тест по данному модулю

Учебно-тематический план модуля «Статистика и теория вероятностей»

№ п/п	Наименование тем	Количество часов		
		всего	теория	практика
1.	Вводное занятие. Техника безопасности. Что изучает теория вероятностей. Эксперимент с желтыми, красными, зелеными шарами	2	2	-
2.	Случайные события	2	-	2
3.	Что вероятнее? Сравнение шансов. Как сравнивать события?	2	-	2
4.	Эксперименты со случаем. Частота абсолютная и относительная	2	-	2
5.	Решение задач на определение относительной частоты исхода	2	-	2
6.	Куда стремятся частоты?	2	-	2
7.	Статистическое определение вероятности	2	-	2
8.	Всегда ли нужно бросать монету? Классическое определение вероятности	2	-	2
9.	События элементарные и не очень. Об исходах и событиях.	2	-	2
10.	Эксперимент по подбрасыванию кубика. Эксперимент по вытягиванию одной карты	2	-	2
11.	Вероятность и комбинаторика. Подсчет шансов	2	-	2

12.	Эксперимент по подбрасыванию монеты. Эксперимент с шарами	2	-	2
13.	Моделирование случайных экспериментов	2	-	2
14.	Точка не бывает случайной. Геометрическое определение вероятности	2	-	2
15.	Сколько изюма в булке и сколько рыб в пруду. Оценивание и прогноз	2	-	2
16.	Противоположное событие. Диаграммы Эйлера. Объединение событий. Пересечение событий	2	-	2
17.	Случайная изменчивость. Примеры случайной изменчивости	2	-	2
18.	Случайные события и вероятность. Как узнать вероятность события? Зачем нужно знать вероятность события?	2	-	2
19.	Вероятности случайных событий. Сложение и умножение вероятностей	2	-	2
20.	Испытания Бернулли. Успех и неудача. Число успехов в испытаниях Бернулли	2	-	2
21.	Числовые характеристики случайных величин	2	-	2
22.	Измерения вероятностей. Точность приближения. Социологические обследования.	2	-	2
23.	Что такое логические задачи и как они решаются Примеры решения логических задач	2	2	-
24.	Разминка. Решение простых задач. Решение задач «Три учителя», «Друзья», «Где живет цветовод»	2	-	2
25.	Семейные узы. Задача «Сколько семей?». Решение задачи «Отцы и дети»	2	-	2
26.	Мир профессий и увлечений. Задача «Бильярдисты». Задача «Цветоводы»	2	-	2
27.	Головоломки. Восстановление результата игры. Задача «Записи рассеянного болельщика»	2	-	2
28.	«Крепкие орешки». Сложные логические задачи. Задачи «Скачки», «Где живет зебра»	2	-	2
29.	Решение задач «Чей щенок?», «Фигуристски». Задача «Четыре рыцаря».	2	-	2
30.	Математический турнир	2	-	2
31.	Логические задачи	2	-	2
32.	Заключительное занятие. Текстовые задачи. Математические игры, выигрышные ситуации	2	-	2
Итого:		64	4	60

Содержание второго модуля «Статистика и теория вероятностей»

Тема занятия №1. Вводное занятие. Техника безопасности. Что изучает теория вероятностей. Эксперимент с желтыми, красными, зелеными шарами.

Теория: Знакомство обучающихся с программой модуля. Правила обучающихся в образовательном учреждении. Изучение инструкций по технике безопасности и пожарной безопасности.

Тема занятия № 2. Случайные события.

Теория: Случайное событие — это исход эксперимента, который может произойти или не произойти в результате определённых условий. Название связано с тем, что именно случай определяет, произойдёт событие или нет.

Классификация

Некоторые виды случайных событий:

- Совместные — могут произойти одновременно.
- Несовместные — не могут произойти одновременно.
- Равновозможные — ни одно из событий не более вероятно, чем другое.
- Противоположные — исключают друг друга, одно из них непременно происходит.

Примеры

Некоторые примеры случайных событий:

- При подбрасывании монеты выпал орёл или решка.
- Выпадение чётного или нечётного числа на шестигранном кубике.
- Победа в футбольном матче или травма одного из игроков.
- Попадание в мишень при выстреле.

Вероятность

Вероятность случайного события — это число от 0 до 1, которое показывает, насколько возможно его наступление.

Если вероятность равна 0, событие невозможно. Если 1 — оно произойдёт обязательно. Любое значение между этими крайностями указывает на случайное событие с определённым шансом.

Вероятность можно рассчитать по формуле: $P(A) = m / n$, где:

- $P(A)$ — вероятность события A ;
- m — число благоприятных исходов;
- n — общее количество всех равновозможных исходов.

Тема занятия №3. Что вероятнее? Сравнение шансов. Как сравнивать события?

Практика: Чтобы сравнить шансы событий, используют теорию вероятностей. Этот раздел математики изучает закономерности и шансы наступления случайного события.

Вероятность случайного события — это положительное число, заключённое между нулём и единицей. События с одинаковой вероятностью называют равновероятными или равновозможными.

Сравнивать вероятность событий можно по частоте, с которой они происходят. Для этого используют вероятностную шкалу. На ней слева располагают невозможные события, справа — достоверные, а между ними — случайные. Чем больше у случайного события шансов произойти, тем оно более вероятно и тем правее его располагают на шкале. Чем меньше шансов — тем левее.

Ещё один способ сравнения — оценка шансов с помощью дробей. Дробь показывает шанс наступления благоприятного случайного события.

Пример: если в ящике находится 10 шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 10, то существует вероятность в 10% вытянуть шарик с числом 10. Однако более вероятным является случай вытягивания любого другого числа от 1 до 9, потому что данная вероятность — 90%.

Тема занятия № 4. Эксперименты со случаем. Частота абсолютная и относительная.

Практика: Абсолютная частота показывает, сколько раз в серии экспериментов наблюдалось определённое событие. Это всегда натуральное число между нулём и общим числом попыток. Например, если 10 человек выбрали «Да» в ходе опроса, абсолютная частота ответа «Да» равна 10.

Относительная частота — это доля или процентное соотношение случаев появления определённого значения или события по сравнению с общим количеством случаев.

Относительная частота — это отношение абсолютной частоты к общему количеству. Например,

если 10 из 50 человек выбрали «Да» в ходе опроса, относительная частота ответов «Да» составляет $10/50$, или 20%.

Формула для определения относительной частоты: Относительная частота = Абсолютная частота / общее количество наблюдений.

Свойство относительных частот: их сумма в каждом случае должна быть равна единице. А если в расчёте на проценты, то 100%.

Тема занятия № 5. Решение задач на определение относительной частоты исхода.

Практика: Для решения задач на определение относительной частоты исхода используется формула: относительная частота = частота события / общее число проведённых экспериментов. Здесь частота события — количество раз, когда оно произошло в серии испытаний, общее число экспериментов — количество всех испытаний.

Примеры задач

- Подбрасывание монеты. Монету подбрасывают 10 раз, «орёл» выпал 4 раза.
Относительная частота: $4 / 10 = 0,4$.
- Бросание кубика. Шестигранный кубик бросают 20 раз, цифра 3 выпала 5 раз.
Относительная частота: $5 / 20 = 0,25$.
- Задача на определение относительной частоты повреждения домов в результате цунами. В страховой компании застраховано от цунами 4000 небоскрёбов, за год от бедствий, вызванных цунами, пострадало 250 из них. Относительная частота: $250 / 4000 = 0,0625$.

Тема занятия № 6. Куда стремятся частоты?

Практика: В статистике частота характеризуется связью с вероятностью и при общем числе наблюдений, стремящемся к бесконечности, в конечном счёте сводится к ней. Это связано с явлением статистической устойчивости: при большом количестве независимых испытаний частота появления случайного события колеблется около некоторого постоянного числа.

Тема занятия № 7. Статистическое определение вероятности.

Практика: Статистическое определение вероятности заключается в том, что вероятность события принимают за относительную частоту его появления в серии испытаний или число, близкое к ней.

Формула

Относительная частота события A вычисляется по формуле: $W(A) = m / n$, где:

- m — число появлений события A в серии из n испытаний;
- n — общее число проведённых испытаний.

Статистическая вероятность события A — предел, к которому стремится относительная частота при неограниченном увеличении числа испытаний: $P(A) = \lim W(A) = \lim m / n$.

Примеры

- Подбрасывание монеты. Вероятность выпадения герба приблизительно равна частоте этого события, полученной при большом числе экспериментов.
- Контроль качества деталей. Если среди 1000 случайно отобранных деталей оказалось 5 бракованных, то вероятность события «произведённая деталь бракованная» оценивается как его частота — 0,005.

Тема занятия № 8. Всегда ли нужно бросать монету? Классическое определение вероятности.

Практика: Нет, бросать монету всегда не нужно, но в некоторых ситуациях, например при решении задач по теории вероятностей, используют пример с подбрасыванием монеты.

Классическое определение вероятности гласит, что вероятность события при проведении некоторого испытания — это отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие, к общему числу всех равновозможных между собой исходов этого испытания.

В примере с монетой есть два элементарных исхода: выпадение орла и выпадение решки. Оба исхода называют равновозможными, или равноправными, то есть считают, что при одном броске имеются одинаковые шансы получить на выходе орла или решку.

Вероятность выпадения герба или решки при броске монеты равна 0,5 (или 50%), потому что есть два равновероятных исхода.

Тема занятия № 9. События элементарные и не очень. Об исходах и событиях.

Практика: Элементарное событие — это такое, которое нельзя «разложить на другие события». Например, при подбрасывании монеты элементарными будут события выпадения орла или решки.

Событие — это совокупность элементарных исходов, или, другими словами, произвольное подмножество пространства элементарных исходов. Например, при подбрасывании игральной кости можно рассмотреть такие события: выпадение чётного числа очков, выпадение нечётного числа очков, выпадение четвёрки.

Исход — это любой результат испытания, который представляет собой появление определённого события. Например, при подбрасывании монеты возможно два исхода: выпадет орёл или решка

Также выделяют достоверные, невозможные и случайные события:

- Достоверное — событие, которое в результате испытания (осуществления определённых действий, определённого комплекса условий) обязательно произойдёт. Пример: в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.
- Невозможное — событие, которое в результате испытания заведомо не произойдёт. Пример: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.
- Случайное — событие, которое в результате испытания может как произойти, так и не произойти. При этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие — следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл».

Тема занятия № 10. Эксперимент по подбрасыванию кубика. Эксперимент по вытягиванию одной карты.

Практика: И эксперимент по подбрасыванию кубика, и эксперимент по вытягиванию одной карты — примеры случайных экспериментов, которые используются для изучения основ вероятности.

Эксперимент по подбрасыванию кубика

Возможные исходы: выпадение числа от 1 до 6.

Пример расчёта вероятности:

- Вероятность выпадения 3 при броске стандартного шестигранного кубика: $1/6$ (благоприятный исход — 3, возможных исходов — 6).
- Вероятность выпадения чётного числа (2, 4 или 6): $3/6 = 1/2 = 0,5$ (благоприятных исходов — 3, всего исходов — 6).

Игральный кубик (кость) бросили один раз. Какова вероятность того, что выпало число очков, большее чем 4?

Решение.

1. Случайный эксперимент – бросание кубика.
2. Элементарное событие – число на выпавшей грани.
Грани всего 6, то есть $N=6$.
3. Событию $A = \{\text{выпало больше чем 4}\}$ благоприятствуют два элементарных события: 5 и 6.
4. Поэтому $N(A)=2$.
5. Все элементарные события равновозможны, поэтому $P(A)=2/6=1/3$.

Ответ: $1/3$.



Выбор есть всегда

MyShared

Эксперимент по вытягиванию одной карты

Возможные исходы: вытягивание одной карты из колоды.

Пример расчёта вероятности:

- Вероятность вытянуть туза из колоды из 52 карт: $4/52 = 1/13$ (благоприятных исходов — 4, возможных исходов — 52).
- Вероятность вытянуть карту в форме сердца (червы) из той же колоды: $13/52 = 1/4 = 0,25$ (благоприятных исходов для черв — 13, возможных исходов — 52).

Пример 21

□ Из колоды в 36 карт наудачу одну за другой вынимают пять карт. Найти вероятность того, что вынутые карты определённой масти.



Тема занятия № 11. Вероятность и комбинаторика. Подсчет шансов.

Практика: Вероятность — это отношение числа случаев, благоприятствующих определённому событию, к общему числу случаев. Например, если все исходы некоторого испытания равновероятны, то вероятность события равна отношению числа благоприятных этому исходу событий к общему числу возможных исходов.

Комбинаторика — раздел математики, который занимается подсчётом количества различных комбинаций, которые можно составить из элементов исходного множества в соответствии с заданным правилом. Простейшими примерами комбинаторных конструкций являются перестановки, размещения и сочетания.

Подсчёт шансов связан с подсчётом числа элементарных событий или, проще говоря, исходов, которые могут возникать в результате эксперимента. Такие подсчёты изучают в комбинаторике.

Некоторые свойства вероятности:

- Вероятность любого события заключена между нулём и единицей.
- Вероятность достоверного события равна единице.
- Вероятность невозможного события равна нулю.

Тема занятия № 12. Эксперимент по подбрасыванию монеты. Эксперимент с шарами.

Практика: Эксперимент с монетой

Подбрасывание монеты — классический эксперимент в теории вероятностей, где возможны два равновероятных исхода: выпадение «орла» или «решки».

Однако в 2023 году учёные провели исследование, которое показало, что подброшенная монета с большей вероятностью упадёт на ту же сторону, на которой была перед подбрасыванием. Это связано с прецессией (изменением направления оси вращения по всей траектории) монеты, из-за чего она проводит больше времени в воздухе одной стороной вверх.

Эксперимент с шарами

Опыт с воздушным шариком и монетой демонстрирует действие центробежной и центростремительной сил.

Для проведения опыта понадобятся: воздушный шарик (лучше бледной расцветки, чтобы при надувании он просвечивал), монетка и нитки.

План опыта:

1. Просунуть монетку внутрь шарика.
2. Надуть шарик и перевязать его ниткой.
3. Взять шарик одной рукой за тот конец, где нитка, и совершить несколько вращательных движений рукой.
4. Через какое-то время монетка начнёт вращаться по кругу внутри шарика.

5. Второй рукой зафиксировать шарик снизу в неподвижном положении.

6. Монетка будет продолжать вращаться ещё 30 секунд или больше.

Объяснение опыта: при вращении шарика на монетку действует центробежная сила, которая прижимает её к внутренней поверхности шара. В то же время на монетку воздействует сам шарик, создавая центростремительную силу. Взаимодействие этих двух сил заставляет вращаться монетку по кругу.

Тема занятия № 13. Моделирование случайных экспериментов.

Практика: Моделирование случайных экспериментов — это процесс создания математических моделей, которые имитируют поведение случайных процессов и событий, с целью изучения их характеристик.

Методы моделирования

Некоторые методы моделирования случайных экспериментов:

- Метод Монте-Карло. Заключается в многократной реализации состояний моделируемой системы с последующей обработкой информации методами математической статистики.
- Имитационное моделирование. Воспроизводит процесс функционирования исследуемой системы, сохраняя логическую структуру и последовательность протекания явлений.
- Статистическое моделирование. Позволяет получать статистические данные о процессах в моделируемой системе.

Этапы моделирования

Моделирование случайных экспериментов обычно включает следующие этапы:

1. Генерация случайных чисел. Используют генераторы псевдослучайных чисел, которые вырабатывают последовательности, обладающие статистическими свойствами случайных чисел.
2. Преобразование случайных чисел. Полученную последовательность преобразуют в соответствие с требованиями модели.
3. Статистическая обработка. Результаты моделирования анализируют, вычисляют характеристики случайных величин (математическое ожидание, дисперсия и др.).

Примеры задач

Моделирование случайных экспериментов применяют для решения различных задач, например:

- Прогнозирование спроса или объёма продаж. Например, расчёт вероятности выигрыша в игре «Кости» с учётом случайных исходов бросков.
- Оценка рентабельности затрат на рекламу. Моделирование помогает эффективно распределить бюджет и спрогнозировать результаты рекламных кампаний.
- Оптимизация бизнес-процессов. Прогнозирование сроков завершения проекта, повышение эффективности распределения ресурсов.

Тема занятия № 14. Точка не бывает случайной. Геометрическое определение вероятности.

Практика: Возможно, имелось в виду геометрическое определение вероятности, согласно которому вероятность попадания случайной точки внутрь некоторой области определяется как отношение размера этой области к размеру всей области, в которой может появляться данная точка.

Геометрическая вероятность события A , являющегося подмножеством множества Ω точек на прямой или плоскости, вычисляется по формуле: $P(A) = S(A) / S(\Omega)$.

Здесь $S(A)$ — площадь фигур A , $S(\Omega)$ — площадь всего множества Ω .

Чаще всего в качестве геометрической меры выступают: длина — если речь идёт о множествах на прямой, площадь — если это объекты на плоскости, объём — если в пространстве.

Тема занятия № 15. Сколько изюма в булке и сколько рыб в пруду. Оценивание и прогноз.

Практика: имелись в виду задачи из теории вероятностей, связанные с оцениванием и прогнозированием, например:

- «Выпекают 3 булочки с изюмом. Найдите вероятность того, что в данной булочке окажется хотя бы одна изюминка, если в замес было добавлено 5 изюминок».

В таких задачах нужно найти отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов.

Также есть задача, в которой нужно определить количество рыб в пруду, если известно, что человек выловил 30 рыб, отметил их метками и отпустил, а на следующий день выловил 40 рыб, из которых 2 были с метками.

Тема занятия № 16. Противоположное событие. Диаграммы Эйлера. Объединение событий. Пересечение событий.

Практика: Противоположное событие

Противоположное событие (отрицание события) означает, что событие не произошло.

Обозначается как $\neg A$.

На диаграмме Эйлера противоположное событие изображают как область, которая не входит в множество события, но находится внутри универсального множества.

Сумма вероятностей противоположных событий всегда равна 1: $P(A) + P(\neg A) = 1$. Вероятность противоположного события рассчитывается по формуле: $P(\neg A) = 1 - P(A)$.

Объединение событий

Объединение событий (обозначается $A \cup B$) означает, что произошло хотя бы одно из событий A или B , либо оба события одновременно.

На диаграмме Эйлера объединение событий изображают как область, которая включает все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A или B .

Пересечение событий

Пересечение событий (обозначается $A \cap B$) означает, что произошли оба события A и B одновременно.

На диаграмме Эйлера пересечение событий изображают как область, где множества A и B перекрываются.

Если события не пересекаются (не имеют общих элементарных исходов), то их пересечение — пустое событие, вероятность которого равна 0: $P(A \cap B) = 0$.

Тема занятия № 17. Случайная изменчивость. Примеры случайной изменчивости.

Практика: Случайная изменчивость — это неустойчивость величины, связанная с действием случайных факторов или причин, часть из которых может быть неизвестна.

Примеры случайной изменчивости встречаются в разных сферах: от жизни до науки.

- Рост человека. Ребёнок растёт, а рост взрослого человека меняется в течение суток в среднем на 1–2 см (при нагрузках — на 3 см и более).
- Время в дороге. Может варьироваться из-за пробок или других непредвиденных обстоятельств.
- Колебания напряжения в бытовых электрических сетях. Номинальное напряжение — 220 В, но в сети оно редко равно в точности этому значению. Обычно напряжение немного выше или ниже.
- Урожайность зерновых культур. Зависит от погодных условий, качества посевного зерна, удобрений и других факторов.

Примеры из жизни

- Массовое производство шоколадных батончиков. На обёртке написано, что масса батончика — 50 г, но при взвешивании только один из 10 батончиков весил в точности 50 г. Некоторые батончики весили больше, а некоторые — меньше.

Примеры в науке

- Рост растений. Даже при одинаковых условиях (свет, вода, почва) некоторые растения вырастают выше других. Это связано с влиянием случайных факторов, таких как генетика, микроэлементы в почве и погодные условия.
- Генетический код живого организма. В каждом новом поколении происходят независимые и случайные мутации, которые практически невозможно предсказать.

Тема занятия № 18. Случайные события и вероятность. Как узнать вероятность события? Зачем нужно знать вероятность события?

Практика: Случайные события — это события, которые могут произойти, а могут и не произойти. Например, если подбрасывать монету, то нельзя заранее предсказать, выпадет орёл или решка.

Вероятность события — это число от 0 до 1, которое показывает, насколько возможно наступление события. Если вероятность равна 0, то событие невозможно, если 1 — то оно произойдёт обязательно. Все значения между этими крайностями — случайные события.

Чтобы узнать вероятность события, нужно определить общее число возможных исходов и количество исходов, которые считаются благоприятными. Если все исходы равновероятны, применяется формула: $P(A) = m / n$, где:

- $P(A)$ — вероятность события A ;
- m — число благоприятных исходов;
- n — общее количество всех исходов.

Например, чтобы найти вероятность вытянуть из колоды 36 карт любую даму, нужно определить, что $m = 4$, $n = 36$, значит, $P = 4 / 36 = 1 / 9 \approx 0,11$, или 11%.

Знать вероятность события важно, так как это позволяет:

- Оценивать риски. Например, если при определённых условиях в некоторой местности вероятность урагана равна 0,25, то можно предсказать, что при многократных повторениях упомянутых условий примерно в 25% случаев начнётся ураган.
- Строить прогнозы. Например, если какое-то событие имеет вероятность 0,99, то в среднем его следует ожидать в 99 случаях из 100, то есть почти всякий раз.
- Принимать решения в условиях неопределённости. Например, понимание, как вычислять вероятность, помогает принимать решения, когда нельзя точно предсказать исход события.

Тема занятия № 19. Вероятности случайных событий. Сложение и умножение вероятностей.

Практика: В теории вероятностей изучают сложение и умножение вероятностей. Эти операции позволяют вычислять вероятности сложных событий, которые состоят из нескольких исходов.

Сложение вероятностей

Теорема сложения вероятностей утверждает, что вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Формула: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого.

- В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Нужно найти вероятность появления цветного шара (либо красного, либо синего). Вероятность появления красного шара (событие A) — $10/30 = 1/3$, синего (событие B) — $5/30 = 1/6$. События A и B несовместны, поэтому применяется теорема сложения: $P(A+B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 0,5$.

Умножение вероятностей

Теорема умножения вероятностей утверждает, что вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Формула: $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.

События называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.

- При броске двух кубиков вероятность того, что на обоих выпадет шестёрка, равна $1/6 \times 1/6 = 1/36$.
- При броске двух монет вероятность того, что обе выпадут орлом, равна $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Примеры задач

- Стрелок стреляет по мишени, разделённой на три области. Вероятность попадания в первую область — 0,45, во вторую — 0,35. Нужно найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт либо в первую, либо во вторую область. Решение: события «стрелок попал в первую область» (A) и «стрелок попал во вторую область» (B)

несовместны, поэтому применяется теорема сложения: $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,8$.

- Вероятность того, что Катя решит задачу, равна 0,8, а вероятность того, что её решит Антон — 0,7. Нужно найти вероятность того, что задачу решат оба ученика. Решение: события А («Катя решит задачу») и В («Антон решит задачу») независимы, поэтому вероятность совместного появления равна произведению вероятностей: $P(A \times B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$.

Тема занятия № 20. Испытания Бернулли. Успех и неудача. Число успехов в испытаниях Бернулли.

Практика: Испытания Бернулли (или биномиальное испытание) — это случайный эксперимент с ровно двумя возможными исходами: успехом и неудачей, при котором вероятность успеха одинакова каждый раз, когда проводится эксперимент.

Успех и неудача в контексте испытаний Бернулли — это обозначения двух результатов, которые не следует толковать буквально или как оценочные суждения.

Вероятность успеха в испытании Бернулли обозначают через p , а вероятность неудачи — через $q = 1 - p$. Поскольку успех и неудача — взаимодополняющие события, их вероятности в сумме равны единице: $p + q = 1$

Примеры испытаний Бернулли:

- Подбрасывание монеты. В этом контексте аверс («орёл») традиционно обозначает успех, а реверс («решка») — неудачу.
- Бросание кубика, где шестёрка означает «успех», а всё остальное — «неудачу».

Число успехов в серии из n испытаний Бернулли обозначается как S_n и может принимать значения от 0 до n . Вероятность того, что в серии из n испытаний Бернулли произойдёт ровно k успехов, вычисляется по формуле: $P(S_n = k) = C_{n,k} p^k q^{n-k}$

Тема занятия № 21 Числовые характеристики случайных величин.

Практика: Числовые характеристики случайных величин — это числовые параметры, которые описывают случайную величину суммарно. К ним относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Тема занятия № 22. Измерения вероятностей. Точность приближения. Социологические обследования.

Практика: Измерения вероятностей в теории включают наблюдение какого-либо явления при соблюдении определённого набора условий. Результатом испытания может быть событие, которое бывает достоверным (всегда происходит), невозможным (никогда не происходит) или случайным (может произойти или не произойти).

Точность приближения в социологических исследованиях зависит от объёма выборки, то есть количества опрошенных. Чем больше объём, тем выше точность. При этом существует связь: с увеличением уровня точности объём выборки должен увеличиваться в квадрате. Например, чтобы увеличить точность вдвое, объём выборки нужно увеличить в четыре раза.

Оценить уровень точности можно на основе вычисления погрешности. Это отклонение выборочной совокупности от генеральной по основным характеристикам. Чем больше величина этих отклонений, тем большая погрешность.

Социологические обследования позволяют вычислить точность результатов исследования. На размер выборочной совокупности влияют три параметра: достоверность, которую хотят придать измерению, точность результата, который хотят получить, и ожидаемая доля, которая, скорее всего, будет получена в результате.

Пример: Институт Дж. Гэллага, проводя опросы в США, обнаружил, что при общенациональной выборке в 100 человек погрешность выборки будет в пределах $\pm 11\%$, в 200 человек — $\pm 8\%$, в 400 человек — $\pm 6\%$, в 600 человек — $\pm 5\%$, в 750 человек — $\pm 4\%$, в 1000 человек — $\pm 4\%$, в 1500 человек — $\pm 3\%$, в 4000 человек — $\pm 2\%$.

Тема занятия № 23. Задачи на части.

Теория: Логические задачи (или нечисловые задачи) — это текстовые задачи, в которых требуется распознать объекты или расположить их в определённом порядке по имеющимся

свойствам. При этом часть утверждений задачи может выступать с различной истинностной оценкой (быть истинной или ложной). Любые вычисления и построения играют вспомогательную роль или вообще отсутствуют.

Некоторые способы решения логических задач:

- Метод рассуждений. Основная идея — последовательно анализировать всю информацию, имеющуюся в задаче, и делать на этой основе выводы.
- Метод таблиц. С помощью таблиц можно наглядно представить условие задачи или её ответ, они помогают в принятии правильных логических решений.
- Метод «с конца». Подходит для задач, в которых известен результат совершения определённых действий, а вопрос состоит в восстановлении первоначальной картины.
- Метод блок-схем. Этим методом решаются задачи, в которых с помощью сосудов требуется отмерить необходимое количество жидкости или связанные со взвешиванием на чашечных весах.

Тема занятия № 24. Разминка. Решение простых задач. Решение задач «Три учителя», «Друзья», «Где живет цветовод»

Практика: Решаем задачи на заданную тему.

Тема занятия № 25. Семейные узы. Задача «Сколько семей?». Решение задачи «Отцы и дети»

Практика: Решаем задачи на заданную тему.

Тема занятия № 26. Мир профессий и увлечений. Задача «Бильярдисты». Задача «Цветоводы»

Практика: Решаем задачи на заданную тему.

Тема занятия № 27. Головоломки. Восстановление результата игры. Задача «Записи рассеянного болельщика»

Практика: Восстановление результата игры — «Записи рассеянного болельщика».

Возможно, имелась в виду задача, в которой нужно по картинкам с реакцией болельщиков на забитые мячи определить счёт футбольного матча, где было 8 голов.

Решение:

1. Нужно определить, кто за какую команду болеет, по картинкам, где показана реакция на голы.
2. Например, на первой картинке человек в клетчатой рубашке радуется, а человек в беретке и рубашке в горошек печалится, значит, они из разных команд.
3. Нужно пометить одного персонажа синим цветом, а другого — красным, и отметить их на всех остальных картинках.
4. На восьмой картинке парень в беретке и рубашке в горошек печалится, а рядом с ним мужчина в чёрном тоже грустит, значит, они из одной команды.
5. На шестой картинке мужчина в клетчатой рубашке и дяденька в шляпе и пиджаке имеют разное настроение, следовательно, болеют за разные команды.
6. На второй картинке рядом с дяденькой в пиджаке сидит лысый в полосатой рубашке, по настроению понятно, что они болеют за разные команды.
7. На четвёртой картинке известный персонаж в полосатой рубашке и шляпе обнимается и радуется вместе с усаемым мужчиной, значит, они болеют за одну команду.
8. На пятом рисунке дядя в клетчатой кепке не разделяет радости усаемого, следовательно, болеет за другую команду.
9. Девушка на седьмой картинке радуется, а её сосед в шляпе и пиджаке — нет, значит, они болеют за разные команды.
10. Теперь понятно, что сидящие на местах 1, 5, 6 и 7 болеют за одну команду (красных), а остальные (2, 3, 4 и 8) — за другую (синих).
11. Можно выяснить, что игра закончилась со счётом 5:3.

Тема занятия № 28. «Крепкие орешки». Сложные логические задачи. Задачи «Скачки», «Где живет зебра»

Практика: Решаем задачи на заданную тему.

Тема занятия № 29. Решение задач «Чей щенок?», «Фигуристски». Задача «Четыре рыцаря».

Практика: Решение задач на заданную тему.

Тема занятия № 30. Математический турнир.

Практика: Проводим математический турнир.

Тема занятия № 31. Логические задачи.

Практика: Решаем логические задачи.

Тема занятия № 32. Заключительное занятие. Текстовые задачи. Математические игры, выигрышные ситуации

Практика: Подводим итоги. Решаем задачи на заданную тему.

Результат обучения по данному модулю

Обучающиеся:

- научились оценивать, сравнивать и вычислять в простых случаях вероятности событий в реальной жизни;
- научились читать, сопоставлять, сравнивать в простых случаях реальные данные, представленные в виде таблиц, диаграмм, графиков
- научились решать простейшие вероятностные задачи.

3. Модуль «Геометрический калейдоскоп»

Цель модуля:

Углубление школьных знаний по планиметрии и стереометрии

Задачи модуля:

- развить интерес к изучению геометрии, творческого отношения к учебной деятельности математического характера;
- ознакомить обучающихся с новыми идеями и методами

Форма контроля:

- выполненное индивидуальное практическое задание

Учебно-тематический план модуля «Геометрический калейдоскоп»

№ п/п	Наименование тем	Количество часов		
		всего	теория	практика
1.	Вводное занятие. Техника безопасности. Основные фигуры на плоскости и в пространстве	2	2	-
2.	Равные и равновеликие фигуры	2	-	2
3.	Решение задач на нахождение площадей фигур на клетчатой бумаге	2	-	2
4.	Многовариантные задачи. Практическая работа.	2	-	2
5.	Задачи по теме “Свойства площадей”. Площади фигур. Отношение площадей.	2	-	2
6.	Фигуры в пространстве. Характеристики и свойства.	2	-	2
7.	Нахождение объема пространственных фигур и их частей	2	-	2
8.	Заключительное занятие по данному модулю. Построение одним циркулем. Решение задач на построение.	2	-	2

	Итого:	16	2	14
--	--------	----	---	----

Содержание программы третьего модуля

Тема занятия №1. Вводное занятие. Техника безопасности. Основные фигуры на плоскости и в пространстве.

Теория: Техника безопасности

На вводном занятии можно рассказать о правилах безопасности в кабинете геометрии, например:

- Общие требования: не загромождать проходы сумками и портфелями, не включать электроосвещение и средства ТСО, не открывать форточки и окна.
- Требования перед началом занятий: не открывать ключом дверь кабинета, входить спокойно, не торопясь, подготовить рабочее место.
- Требования во время занятий: внимательно слушать объяснения и указания учителя, соблюдать порядок и дисциплину, не переносить оборудование без разрешения.
- Требования в аварийных ситуациях: при возникновении пожара или других чрезвычайных ситуаций покинуть кабинет по указанию учителя в организованном порядке.

Основные фигуры на плоскости

Некоторые фигуры, которые изучают на вводном занятии:

- Точка — минимальный объект в геометрии, не имеет размеров, обозначается заглавной буквой латинского алфавита (А, В, С) или числом (1, 2, 3).
- Прямая — непрерывная линия, которая не имеет начала и конца, через две точки можно провести только одну прямую.
- Луч — часть прямой, у которой есть начальная точка, но нет конца.
- Отрезок — составная часть прямой, которая ограничена двумя точками, имеет начало и конец, его длину можно измерить.
- Треугольник — фигура, которая образуется, когда три отрезка соединяют три точки, не лежащие на одной прямой.
- Трапеция — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две — нет.

Тема занятия № 2. Равные и равновеликие фигуры.

Практика: Равные фигуры — это фигуры, которые совпадают при наложении, их можно переворачивать и перемещать не только на плоскости, но и в пространстве. Например, два треугольника с равными сторонами и углами будут равными, даже если для наложения один из них нужно перевернуть.

Равновеликие фигуры — это фигуры, которые имеют одинаковую площадь, то есть занимают одинаковую область на плоскости. Чтобы две фигуры были равновеликими, их площади должны быть одинаковыми, независимо от формы или размеров.

Таким образом, равные фигуры всегда равновеликие, а равновеликие фигуры могут быть не только не равными, но и разными.

Тема занятия № 3. Решение задач на нахождение площадей фигур на клетчатой бумаге.

Практика: Задачи на нахождение площадей фигур, изображённых на клетчатой бумаге, решаются с помощью различных методов, выбор которых зависит от формы фигуры.

Методы решения

- Подсчёт клеток. Нужно посчитать количество клеток в фигуре, учитывая масштаб, найти площадь одной клетки и умножить количество клеток на площадь одной клетки.
- Разбиение фигуры на части. Фигуру разбивают на прямоугольники, квадраты или треугольники, находят площадь каждой фигуры и складывают их.
- Дистраивание фигуры до прямоугольника. Фигуру дистраивают до прямоугольника, находят площадь прямоугольника, а затем из площади прямоугольника вычитают площади полученных фигур.
- Формула Пика. Подходит для многоугольников с вершинами в узлах сетки (точках пересечения линий). Площадь вычисляется по формуле: $S = (\text{количество узлов на границе} / 2) + \text{количество узлов внутри фигуры} - 1$.

Примеры задач

- Задача на треугольник. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Нужно найти его площадь.

Решение:

- Обозначить вершины треугольника за А, В, С и провести высоту АН к стороне ВС по линиям сетки.
- Площадь треугольника можно найти по формуле: $S = \frac{1}{2} * АН * ВС$.
- По рисунку определить, что $АН = 5$, $ВС = 3$.
- Подставить эти значения в формулу: $S = \frac{1}{2} * 5 * 3 = 7,5$.

Ответ: 7,5.

- Задача на трапецию. Нужно найти площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см.

Решение:

- Определить длины оснований (а и b) и высоту (h).
- Подставить значения в формулу площади: $S = \frac{1}{2} * (a + b) * h$.

Расчёт: $S = \frac{1}{2} * (1 + 6) * 5 = 17,5$.

Ответ: 17,5.

Тема занятия № 4. Многовариантные задачи. Практическая работа.

Практика: Многовариантные задачи — это задачи, в условии которых есть неопределённость, позволяющая трактовать условие неоднозначно. В результате удаётся построить несколько чертежей, удовлетворяющих условию задачи.

Практическая работа может включать изучение видов многовариантных задач, методов их решения, примеров таких задач и ресурсов для их решения.

Тема занятия № 5. Задачи по теме “Свойства площадей”. Площади фигур. Отношение площадей.

Практика: Некоторые свойства площадей, которые могут использоваться при решении задач:

- Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).
- Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.
- Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Тема занятия № 6. Фигуры в пространстве. Характеристики и свойства.

Практика: Фигуры в пространстве, их характеристики и свойства изучает раздел геометрии — стереометрия. Этот раздел рассматривает трёхмерные геометрические объекты, их типы, свойства, а также методы вычисления объёмов и площадей поверхностей.

Основные фигуры

Некоторые типы фигур, изучаемые в стереометрии:

- Многогранники: куб, призма, пирамида.
- Тела вращения: цилиндр, конус, шар.

Примеры пространственных фигур

Свойства фигур

Некоторые свойства пространственных фигур:

- Взаимное расположение прямых и плоскостей. Например, две прямые параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, или скрещиваются, если не существует такой плоскости, в которой они обе лежат.
- Перпендикулярность. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости.
- Сечения. Плоскости могут пересекать фигуры, и это меняет их форму. Например, если разрезать пирамиду на куски, каждый из которых будет выглядеть по-своему, это поможет понять, как изменяется форма объекта при разных сечениях.

Методы вычисления объёмов и площадей

Для некоторых фигур в стереометрии существуют специальные формулы:

- Объём куба — куб длины его грани: $V = a^3$, где а — длина грани.

- Объем призмы — произведение площади основания на высоту: $V = S_o \times h$, где S_o — площадь основания, h — высота.
- Объем прямоугольного параллелепипеда — произведение его длины, ширины и высоты: $V = a \times b \times h$, где a — длина, b — ширина, h — высота.
- Объем пирамиды — треть от произведения площади её основания на высоту: $V = 1/3 S_o \times h$, где S_o — площадь основания пирамиды, h — высота пирамиды.
- Объем цилиндра — произведение площади его основания на высоту: $V = \pi \times R^2 \times h$, где R — радиус основания, h — высота, $\pi = 3,141592$.

Тема занятия № 7. Нахождение объема пространственных фигур и их частей.

Практика: Объем пространственных фигур и их частей можно найти с помощью формул и онлайн-калькуляторов.

Формулы для вычисления объема

Некоторые формулы для расчёта объема разных фигур:

- Объем куба: $V = a^3$, где a — длина грани куба.
- Объем призмы: $V = S_o \times h$, где S_o — площадь основания призмы, h — высота призмы.
- Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = a \times b \times h$, где a , b — длина, ширина, h — высота.
- Объем пирамиды: $V = 1/3 S_o \times h$, где S_o — площадь основания пирамиды, h — высота пирамиды.
- Объем цилиндра: $V = \pi R^2 \times h$, где R — радиус цилиндра, h — высота цилиндра, $\pi = 3,14$.
- Объем конуса: $V = 1/3 S_o \times h$, где S_o — площадь основания конуса, h — высота конуса.
- Объем шара: $V = 4/3 \pi R^3$, где R — радиус шара, $\pi = 3,14$.

Примеры задач

- Найти объем многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).
Решение: достроить многогранник до параллелепипеда, найти объем параллелепипеда, вычислить объем лишней части и вычесть его из объема параллелепипеда.
- Определить объем части цилиндра, изображённой на рисунке (радиус цилиндра равен 15, высота — 5).
Решение: вырезать из цилиндра кусок с углом 60° , найти объем оставшейся части, умножить его на $5/6$ и разделить на π .

Тема занятия № 8. Заключительное занятие по данному модулю. Построение одним циркулем. Решение задач на построение.

Практика: На таком занятии можно рассмотреть несколько задач, которые решаются с помощью только одного циркуля:

- Построить какую-нибудь точку, не лежащую на данной прямой.
- В прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 вписать окружность, пользуясь одним циркулем.
- Дана окружность и её центр. С помощью циркуля разделить эту окружность на четыре равные части.
- Только с помощью циркуля построить точки пересечения прямой AB с окружностью.
- Построить отрезок, в 2, 3, 4, ... в n раз больше данного отрезка A (n — любое натуральное число).

Важно объяснить, что решение задач на построение обычно включает четыре этапа:

1. Анализ. Поиск решения задачи, установление последовательности, алгоритма, состоящего из основных или элементарных построений, приводящих к построению искомой фигуры.
2. Построение. Реализация на чертеже найденного алгоритма с помощью выбранных инструментов построения.
3. Доказательство. Доказательство того, что построенная на предыдущем этапе фигура действительно искомая, то есть удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.
4. Исследование. Выяснение того, всегда ли задача имеет решение. Если не всегда, то при каких конкретных данных и сколько именно решений она имеет.

Результат обучения по данному модулю

Обучающиеся:

- научились самостоятельно приобретать и оценивать достоверность новой информации геометрического содержания
- получили навыки и использования обучающихся нестандартных методов при решении геометрических задач;
- освоили решение задач на построение.

II год обучения

Содержание учебного материала состоит из 3 модулей: «Математика для любознательных», «Комбинаторика вокруг нас», «Геометрическая мозаика». Каждый из модулей имеет свою специфику и направлен на решение своих собственных целей и задач.

№ п/п	Наименование модуля	Количество часов		
		теория	практика	всего
1.	Математика для любознательных.	6	82	88
2.	Комбинаторика вокруг нас.	10	20	30
3.	Финансы и математика.	6	20	26
Итого:		20	124	144

1. Модуль «Математика для любознательных»

Цель модуля:

Создание условий для повышения уровня математической культуры, развитие математического мышления и творческой активности

Задачи модуля:

- обучить практическим навыкам решения разных типов задач;
- развить математические способности;
- расширить знания о нестандартных задачах;
- развить познавательный интерес и интеллектуальные способности в процессе решения задач;
- развить логическое мышление, математический кругозор;
- развить познавательную и творческую деятельность

Форма контроля:

- различные интеллектуальные конкурсы и марафоны, проводимые по окончании изучения каждого раздела

Учебно-тематический план модуля «Математика для любознательных»

№ п/п	Наименование тем	Количество часов		
		всего	теория	практика
1.	Вводное занятие.	2	2	-
2.	Решение нестандартных задач по планиметрии.	4	-	4
3.	Делимость целых чисел.	2	-	2
4.	Основная теорема арифметики. Решение сложных задач.	4	-	4
5.	Деление целых чисел с остатком. Признаки делимости и равноостаточности.	2	-	2
6.	Решение уравнений в целых числах.	2	-	2
7.	Сравнения.	2	-	2
8.	Квадратные неравенства.	2	-	2
9.	График квадратного трехчлена. Задачи с параметрами.	4	-	4
10.	Задачи с модулем. Квадратные уравнения и	4	-	4

	неравенства с модулем.			
11.	Равносильность уравнений. Равносильные уравнения в задачах.	2	-	2
12.	Иррациональные уравнения.	2	-	2
13.	Системы уравнений с параметрами.	2	-	2
14.	Элементы теории множеств.	2	-	2
15.	Решение нестандартных задач по стереометрии	4	-	4
16.	Задачи на «сложные» проценты	4	-	4
17.	Задачи с альтернативным содержанием.	2	-	2
18.	Принцип Дирихле в олимпиадных задачах	4	-	4
19.	Правило крайнего.	2	-	2
20.	Графы.	2	-	2
21.	Инварианты.	2	-	2
22.	Покрытия и упаковки.	2	-	2
23.	Разрезания.	2	1	1
24.	Замещения.	2	1	1
25.	Раскраски.	2	-	2
26.	Игры.	4	-	4
27.	Симметрия и повороты.	4	-	4
28.	Вспомогательная окружность.	4	2	2
29.	Метод вспомогательной площади.	2	-	2
30.	Решение алгебраических задач с помощью подобия треугольников.	4	-	4
31.	Решение олимпиадных задач.	4	-	4
32.	Заключительное занятие по данному модулю. Математический бой	2	-	2
Итого:		88	6	82

Содержание программы первого модуля

Тема занятия №1. Вводное занятие. Инструктаж по охране труда и ТБ.

Теория: Знакомство обучающихся с программой модуля. Правила обучающихся в образовательном учреждении. Изучение инструкций по технике безопасности и пожарной безопасности.

Тема занятия № 2. Решение нестандартных задач по планиметрии.

Практика: Типы нестандартных задач

Некоторые типы нестандартных задач по планиметрии:

- Многовариантные. В условии содержится неопределённость, которая позволяет трактовать задачу неоднозначно. В результате построения получается несколько чертежей, удовлетворяющих условию.
- Задачи с нестандартными инструментами. Например, требуется пользоваться не только циркулем и линейкой, но и другими инструментами: одной линейкой, одним циркулем, двусторонней линейкой.
- Задачи с недоступными точками. В условии могут быть точки, которые нельзя достичь обычными инструментами.

Методы решения

Для решения нестандартных задач по планиметрии можно использовать следующие методы:

- Дополнительные построения. Введение в чертёж дополнительных линий, которые вводят новые углы и отрезки, иногда приводят к появлению геометрических фигур, облегчающих решение задачи.

- Геометрические преобразования. Например, поворот элементов заданной фигуры, который позволяет построить вспомогательный треугольник.
- Использование вспомогательной окружности. Около треугольника или четырёхугольника описывают окружность, что позволяет использовать теорему о вписанном угле и её следствиям
- Метод опорного элемента. Один и тот же элемент (сторона, угол, площадь и т. д.) выражают через известные и неизвестные величины двумя разными способами, а затем приравнивают полученные выражения.

Примеры задач

Несколько примеров нестандартных задач по планиметрии:

- Задача о трисекции угла. Требуется разделить произвольный угол на три равные части. Решение: строят равносторонний треугольник, основанный на том, что в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60 градусам.
- Задача с недоступными точками. Например, нужно найти геометрическое место середин хорд окружности, проходящих через точку, которая не лежит на окружности. Решение: используют метод построения с помощью двусторонней линейки, чтобы проводить произвольную прямую и параллельные прямые.

Тема занятия №3. Делимость целых чисел.

Практика: Делимость целых чисел — это возможность разделить одно число на другое без остатка (нацело).

Число a делится на число b , если существует такое целое число q , что $a = bq$. Число a называется делимым, b — делителем, а q — частным. Также говорят, что a кратно b .

Признаки делимости

Некоторые признаки делимости для разных чисел:

- На 2 — последняя цифра чётная: 0, 2, 4, 6 или 8.
- На 3 — сумма всех цифр делится на 3.
- На 4 — две последние цифры — нули или образуют число, делящееся на 4.
- На 5 — число оканчивается на 0 или 5.
- На 6 — число делится на 2 и на 3 одновременно (последняя цифра чётная, и сумма цифр делится на 3).
- На 8 — три последние цифры — нули или образуют число, делящееся на 8.
- На 9 — сумма цифр делится на 9.
- На 10 — число оканчивается на 0.

Свойства делимости

Некоторые свойства делимости:

- Если два числа делятся на число, то и их сумма делится на это число.
- Если число делится на число, то и число, полученное умножением на любое целое число, делится на это число.
- Если число делится на число, а это число делится на другое число, то первое число делится на второе (свойство транзитивности).

Примеры делимости

Пример: число 6 делится на 3, так как результат деления — 2, целое число, а остаток равен 0.

Пример: число 7 не делится на 3, так как результат деления — $2,333\ldots$ — не является целым числом

Тема занятия № 4. Основная теорема арифметики. Решение сложных задач.

Практика: Основная теорема арифметики гласит, что любое натуральное число (кроме единицы) можно представить в виде произведения простых множителей, и притом единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Решение сложных задач с использованием основной теоремы арифметики основано на каноническом разложении числа на простые множители. Благодаря этому разложению становится видна вся картина делителей данного числа.

Пример решения задачи: произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 10 000. Нужно найти сумму этих чисел.

Решение: разложим число 10 000 на простые множители: $10\,000 = 2 \cdot 5$. Тогда каждое из двух исходных чисел может содержать в своём разложении на простые множители только 2 и 5. Если число одновременно содержит и двойку, и пятёрку в своём разложении, то оно делится на 10, что противоречит условию. Поэтому одно число содержит только двойки, а значит, оно равно $2^4 = 16$. Второе число содержит только пятёрки, следовательно, оно равно $5^4 = 625$. Тогда сумма этих чисел равна $16 + 625 = 641$.

Ответ: 641.

Тема занятия № 5. Деление целых чисел с остатком. Признаки делимости и равноостаточности.

Практика: Деление целых чисел с остатком, признаки делимости и признак равноостаточности — темы, которые связаны с арифметикой целых чисел.

Определение деления с остатком

Деление целого числа a (делимого) на b (делитель) означает нахождение таких целых чисел q (неполное частное) и r (остаток), что выполняется равенство: $a = b \cdot q + r$.

Остаток должен быть неотрицательным числом и по абсолютной величине меньше делителя: $0 \leq r < |b|$. Если остаток равен нулю, говорят, что число делится на делитель нацело.

Признаки делимости

Признаки делимости — это алгоритмы, которые позволяют определить, кратно число заданному делителю или нет, без выполнения полного деления.

Некоторые признаки делимости:

- На 2: число делится на 2, если его последняя цифра чётная (0, 2, 4, 6 или 8).
- На 3: число делится на 3, если сумма всех его цифр делится на 3.
- На 4: число делится на 4, если две последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 4.
- На 5: число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или 5.

Признак равноостаточности

Признак равноостаточности — это утверждение, что целое число даёт при делении на заданное число такой же остаток, как и его последняя цифра.

Например, при делении на 10 последняя цифра числа — и есть остаток.

Алгоритм деления

Алгоритм деления целых чисел с остатком включает следующие шаги:

1. Разделить делимое на делитель и определить частное.
2. Найти остаток, который остаётся после вычитания произведения частного и делителя из делимого.
3. Записать результат в формате: делимое = делитель $\cdot$ частное + остаток.

Пример: разделить 57 на 8:

1. $57 : 8 = 7$ (частное).
2. $7 \cdot 8 = 56$.

3. Остаток = $57 - 56 = 1$.

4. Запись: $57 = 8 \cdot 7 + 1$.

Тема занятия № 6. Решение уравнений в целых числах.

Практика: Решение уравнений в целых числах (диофантовых уравнений) — задача, для которой нужно найти целые решения алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

Методы решения

Некоторые методы решения уравнений в целых числах:

- Использование свойств делимости. Если одна часть уравнения делится на некоторое число, то и другая должна на него делиться.
- Метод перебора вариантов. Нужно рассмотреть все возможные значения переменных, чтобы найти решения.
- Алгоритм Евклида. Позволяет найти наибольший общий делитель чисел, после чего уравнение можно упростить.
- Метод цепных дробей. Позволяет представить отношение коэффициентов при неизвестных в виде цепной дроби, а затем найти решения через преобразование в простую дробь.
- Решение уравнения как квадратного относительно одной из переменных.
- Рассмотрение остатков от деления обеих частей уравнения на некоторое число. Если левая часть кратна числу, то и правая должна быть кратна этому же числу.

Часто применяют комбинирование нескольких методов.

Примеры решений

Пример 1: решить уравнение $(x - 2)(y + 3) = 4$ в целых числах.

Решение: перебрать варианты: $x - 2 = 1$, $y + 3 = 4$ — решение $x = 3$, $y = 1$. Также рассмотреть варианты: $x - 2 = 4$, $y + 3 = 1$ — решение $x = 6$, $y = -2$.

Пример 2: решить уравнение $10x + 10y = 2019$ в целых числах.

Решение: при любых целых значениях x и y левая часть уравнения делится на 2, а правая — нечётное число, поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

Тема занятия № 7. Сравнения.

Практика: Сравнение — это сопоставление изображаемого предмета или явления с другим предметом по общему для них признаку. ⁱ

Как средство художественной выразительности сравнение — это обособленный оборот, который начинается с союзов «как», «будто», «словно», «точно», «подобно», «чем» и т. д. либо со слов «похожий/ая/ое на...».

В редких случаях сравнение может быть также построено:

- с помощью существительного, стоящего в творительном падеже («птица камнем рухнула на землю» = «рухнула, как камень», «метнуться кабанчиком» = «метнуться, как кабанчик»);
- с помощью прилагательного в сравнительной степени («ты на свете всех милее» = «ты милее, чем все»).

Сравнения помогают увидеть необычное в привычном, обыденном, найти сходство, казалось бы, несопоставимых предметов и явлений.

Тема занятия № 8. Квадратные неравенства.

Практика: Квадратным неравенством называют неравенство вида:

$ax^2 + bx + c > 0$ (знак неравенства может быть также « $\leq$ », « $\geq$ »).

Здесь a , b , c — действительные числа, причём $a \neq 0$, x — переменная. Также квадратные неравенства называют неравенствами второй степени.

Методы решения

Для решения квадратных неравенств используют, например:

- Графический метод. Предполагает построение и анализ графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Решением неравенства являются промежутки или интервалы, на которых функция принимает положительные и отрицательные значения.
- Метод интервалов. Суть метода — определить знаки промежутков, на которые разбивается ось координат нулями трёхчлена $ax^2 + bx + c$ (при их наличии). Для неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ решениями являются промежутки со знаком «+», для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ — промежутки со знаком «-». Если неравенство нестрогое, то решением становится интервал, который включает точки, соответствующие нулям трёхчлена.
- Выделение квадрата двучлена. Позволяет перейти к равносильному неравенству вида $(x - p)^2 < q$ ($\leq$, $>$, $\geq$), где p и q — некоторые числа.

Примеры

- $5x^2 - 3x + 1 > 0$;
- $-2,2z^2 - 0,5z - 11 \leq 0$;
- $123x^2 - x + 57 < 0$.

Тема занятия № 9. График квадратного трёхчлена. Задачи с параметрами.

Практика: График квадратного трёхчлена — парабола. В зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ возможны разные случаи расположения графика:

- $D > 0$. Существуют две различные точки пересечения параболы с осью Ox (два различных корня трёхчлена).
- $D = 0$. Эти две точки сливаются в одну, то есть парабола касается оси Ox (один корень трёхчлена).
- $D < 0$. Точек пересечения с осью Ox нет (и корней трёхчлена нет). В этом случае при $a > 0$ парабола лежит целиком выше оси Ox , при $a < 0$ — целиком ниже оси Ox .

Задачи с параметрами связаны с квадратными уравнениями, в которых значения переменных a , b , c считаются фиксированными и заданными, а сами переменные называют параметром. Чтобы решить такое уравнение, нужно понять, при каких значениях параметра существуют корни, и найти их, выразив через параметр.

Иногда в задачах с параметром просят найти такие значения параметра, при которых корни принадлежат определённому числовому промежутку.

Тема занятия № 10. Задачи с модулем. Квадратные уравнения и неравенства с модулем.

Практика: Задачи с модулем включают решение квадратных уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Для этого используются методы, основанные на определении модуля и раскрытии модуля.

Решение квадратных уравнений

Алгоритм решения квадратных уравнений с модулем:

1. Разделить уравнение на два случая. Модуль даёт два возможных значения: положительное и отрицательное.
2. Решить оба случая отдельно. Если в одном из случаев под корнем получается отрицательное число, решений нет.

Ещё один метод решения — замена переменной. Например, если в уравнении есть выражение под знаком модуля, можно ввести новую переменную и решить уравнение без модуля, а затем вернуться к исходной переменной.

Решение неравенств

Простейшие неравенства с модулем решаются с помощью определения модуля:

- Неравенство вида $|x| < a$ (модуль меньше числа). Если $a < 0$, то неравенство не имеет решений, так как модуль не может быть меньше отрицательного числа. Если $a > 0$, то решениями будут значения $x \in (-a; a)$.
- Неравенство вида $|x| > a$ (модуль больше числа). Если $a < 0$, то решениями будут все действительные числа. Если $a > 0$, то неравенство требует, чтобы число x не приближалось к нулю ближе чем на a единичных отрезков. Значит, $x < -a$ или $x > a$, то есть $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

Если неравенство содержит несколько модулей, используется алгоритм решения с промежутками:

1. Найти в неравенстве все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Определить, при каких значениях переменной они обращаются в нуль.
3. Разбить найденными значениями числовую прямую на непересекающиеся промежутки.
4. Определить для каждого промежутка, чему равно значение каждого модуля: самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или противоположному ему.
5. Для каждого промежутка записать и решить исходное неравенство без знаков модуля.
6. Найти пересечение полученных множеств решений и соответствующих числовых промежутков.
7. В ответе записать объединение всех получившихся множеств решений.

Тема занятия № 11. Равносильность уравнений. Равносильные уравнения в задачах.

Практика: Равносильность уравнений — понятие, которое означает, что уравнения имеют одно и то же множество решений.

Определение

Два уравнения с одной переменной называются равносильными, если множества их корней совпадают. Это означает, что каждое решение одного уравнения является решением другого, и наоборот.

Равносильными считаются также уравнения, каждое из которых не имеет корней (множество решений пусто).

Примеры

- Уравнения $x + 2 = 5$ и $x + 5 = 8$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень — число 3.
- Уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $2x^2 + 5 = 0$ равносильны, так как ни одно из них не имеет корней.
- Уравнения $x - 5 = 1$ и $x^2 = 36$ неравносильны, так как первое имеет только один корень 6, а второе — два корня: 6 и -6.

Применение в задачах

Равносильность уравнений используется для решения задач путём замены исходного уравнения на равносильное, множество решений которого найти легче.

При этом важно не потерять корни — если при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение является следствием предыдущего, то найденные корни последнего уравнения будут корнями исходного. Если нет уверенности в некоторых преобразованиях, то найденные корни нужно проверить, подставив их поочерёдно в исходное уравнение. Если корень не удовлетворяет заданному, то он считается посторонним и отбрасывается.

Тема занятия № 12. Иррациональные уравнения.

Практика: Иррациональное уравнение — это уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня (радикала) или возведённое в степень, которую нельзя свести к целому числу.

Основная цель решения таких уравнений — найти значения переменной, при которых уравнение превращается в верное равенство, либо доказать, что таких значений не существует.

Методы решения

Некоторые методы решения иррациональных уравнений:

- Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень. Если в уравнении один радикал, его записывают так, чтобы в одной части знака равенства оказался только он, затем обе части возводят в одну и ту же степень. Если радикалов два или более, процесс повторяют, пока не получится рациональное уравнение.
- Введение новой переменной. Применяется, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины.
- Разложение на множители. Позволяет свести уравнение к совокупности уравнений, которые уже решаются как рациональные.

Перед решением любого иррационального уравнения нужно найти область допустимых значений (ОДЗ). Под знаком корня чётной степени могут стоять только положительные числа или равные нулю.

Примеры

Некоторые примеры иррациональных уравнений:

- $\sqrt{x} + x = 27$;
- $x^{1/3} + 3 = 10$;
- $1 / \sqrt{3(x+3)} + 2x = 19$.

Тема занятия № 13. Системы уравнений с параметрами.

Практика: Системы уравнений с параметрами — это системы, в записи которых, кроме неизвестных переменных, есть буквы, обозначающие числа (параметры). Задача решения таких систем — найти для каждого значения параметра соответствующее множество решений системы или установить, что при данном значении параметра решений нет.

Методы решения

Некоторые методы решения систем уравнений с параметрами:

- Метод подстановки. Одна из переменных выражается через другую из подходящего уравнения, после чего результат подставляется во второе уравнение.
- Сложение или вычитание уравнений. Применяется, если после сложения или вычитания в одном из уравнений остаётся только одна неизвестная.
- Умножение или деление одного из уравнений на некоторое число. Помогает преобразовать уравнения для более удобного применения методов подстановки или сложения.
- Графический метод. Из каждого уравнения выражается одна переменная, строятся графики, после чего определяются координаты точек пересечения.

Примеры задач

Пример задачи с системой уравнений, содержащей параметр:

Найти все значения параметра a , при которых система уравнений не имеет решений: $\{x + (a^2 - 3)y = a, \{x + y = 2.$

Решение:

1. Используется свойство: система не имеет решений, если отношение коэффициентов перед x равно отношению коэффициентов перед y , но не равно отношению свободных членов ($a/a1 = b/b1 \neq c/c1$).
2. Условие: $1/1 = (a^2 - 3)/1 \neq a/2$, поэтому $a = -2$ — ответ.

Тема занятия № 14. Элементы теории множеств.

Практика: Элементы теории множеств включают основные понятия и операции над множествами, а также примеры, иллюстрирующие эти понятия.

Основные понятия

- Множество — совокупность объектов, объединённых в одно целое по какому-либо признаку.
- Элемент — объект, из которого состоит множество.
- Пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента. Обозначается символом $\emptyset$.
- Равные множества — множества, состоящие из одних и тех же элементов.

Подмножество — множество, каждый элемент которого является элементом другого множества.

Тема занятия № 15. Решение нестандартных задач по стереометрии.

Практика: Для решения нестандартных задач по стереометрии можно использовать различные методы, например:

- Классический — основанный на определениях и признаках.
- Векторно-координатный — предполагает использование готовых формул и алгоритмов.
- Интерактивные тренажеры с динамическими моделями пространственных тел.

Нестандартные задачи часто требуют нестандартного подхода и использования разных инструментов.

Примеры задач

- Задача на нахождение угла между прямыми в правильной шестиугольной призме. Можно решить её, не выполняя громоздких вычислений, если рассмотреть призму на боковой грани и рассмотреть правильную четырёхугольную призму. Прямая в шестиугольной призме перпендикулярна диагональной плоскости, значит, перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в том числе и прямой, лежащей в этой плоскости. Ответ: угол между прямыми равен 90° .
- Задача на вычисление площади сечения пирамиды. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые рёбра равны 16. Нужно найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC. Для решения можно использовать модель пирамиды, рассмотреть сечение в виде прямоугольника и вычислить его площадь.

Тема занятия № 16. Задачи на «сложные» проценты.

Практика: Задачи на сложные проценты связаны с расчётом конечной суммы при условии, что проценты начисляются не только на начальную сумму, но и на уже накопленные проценты. Этот процесс называется капитализацией.

Типы задач

Некоторые типы задач на сложные проценты:

- Расчёт конечной суммы при заданной начальной сумме и процентной ставке.
- Определение срока, за который сумма достигнет определённой величины при условии, что ежегодно или ежемесячно начисляются проценты.
- Расчёт прибыли от вклада при условии, что проценты не снимаются со счёта, а реинвестируются.

Примеры задач

- Задача на расчёт конечной суммы вклада. Например, если положить 50 000 рублей в банк под 10% годовых на 5 лет, то какая сумма будет на счёте через 5 лет?
Решение: конечная сумма рассчитывается по формуле: $SUM = X \times (1 + \%)^n$, где SUM — конечная сумма, X — начальная сумма, % — процентная ставка, n — количество периодов. Подстановка значений: $SUM = 50\,000 \times (1 + 10/100)^5 = 80\,525,5$ рублей.
- Задача на расчёт прибыли при ежемесячном начислении процентов. Если положить 10 000 рублей на 12 месяцев под 10% годовых с ежемесячным начислением процентов, то какая сумма будет на счёте?

Решение: конечная сумма рассчитывается по формуле: $SUM = 10\,000 \times (1 + 10/100/12)^n$.

Подстановка значений: $SUM = 10\,000 \times (1 + 10/100/12)^n = 11\,047,13$ рублей.

Тема занятия № 17. Задачи с альтернативным содержанием.

Практика: Задачи с альтернативным условием — это задачи, в ходе решения которых необходимо рассматривать несколько возможных вариантов условия, а ответ находится после того, как все возможные варианты будут исследованы.

Пример такой задачи: «Разница в росте Тома и Гека составляет 4 см. Рост Тома — 1 м 25 см. Какого роста может быть Гек?». В этой задаче есть два варианта условия: Гек может быть выше Тома на 4 см и Гек может быть ниже Тома на 4 см, соответственно, и решение такой задачи имеет два варианта.

Ещё один пример: «Катя вырезала 15 белых и 14 голубых снежинок. 6 снежинок одного цвета она отдала Пете. Сколько белых и голубых снежинок осталось у Кати?». Решение: Вова: $15 - 6 = 9$ (белых снежинок). Ответ: у Кати осталось 9 белых и 14 голубых снежинок. Серёжа: $14 - 6 = 8$ (голубых снежинок). Ответ: у Кати осталось 15 белых и 8 голубых снежинок. Коля: $15 - 5 = 9$ (белых снежинок), $14 - 6 = 8$ (голубых снежинок). Ответ: у Кати осталось 9 белых и 14 голубых снежинок или 15 белых и 8 голубых снежинок

Тема занятия № 18. Принцип Дирихле в олимпиадных задачах.

Практика: Принцип Дирихле часто встречается в олимпиадных задачах. Он помогает решать задачи, связанные с распределением объектов по ячейкам, и устанавливает соотношение между множествами.

Формулировки принципа

Простейшая формулировка: если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

Парная формулировка: если число клеток больше, чем число кроликов, то как минимум одна клетка пуста.

Методы решения задач

При решении задач с использованием принципа Дирихле важно определить, какие объекты в задаче играют роль «кроликов», а какие — «клеток». Также может использоваться метод доказательства от противного. Например, чтобы доказать формулировку принципа, можно предположить, что в каждой клетке сидит менее двух кроликов, и вывести противоречие.

Принцип Дирихле даёт неконструктивное доказательство: известно, что такая клетка есть, но где именно она находится, часто указать нельзя.

Примеры задач

Задача на доказательство: в Москве живёт около 10 миллионов человек, на голове у каждого не более 150 000 волос. Доказать, что в Москве есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове.

Решение: жители играют роль «кроликов», а количество волос — роль «клеток» (их 150 001). Каждый «кролик» попадает в ту «клетку», которая соответствует количеству волос у него на голове. По принципу Дирихле найдётся «клетка», в которой сидит не менее 60 «кроликов». Следовательно, в Москве есть по крайней мере 60 человек с одинаковым числом волос на голове.

Задача на распределение: 100 человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Доказать, что какие-то двое мужчин сидят друг напротив друга.

Решение: разобьём всех на 50 пар людей, сидящих друг напротив друга. Тогда у нас есть 50 пар («клетки»), в которые нужно рассадить не менее 51 мужчины («кролики»). Из принципа Дирихле следует, что в одной из этих пар-«клеток» оба человека — мужчины-«кролики».

Тема занятия № 19. Правило крайнего.

Практика: Правило (принцип) крайнего — метод решения задач, при котором в качестве ключевого элемента рассматривают крайнюю величину (элемент, характеристику).

Суть правила: среди объектов, фигурирующих в условии задачи, выбирают объект с «крайним» по отношению к другим объектам свойством — самый левый, самый нижний, самый маленький или самый большой и так далее.

Если в задаче речь идёт о множестве точек на прямой (плоскости), то правило советует сосредоточить внимание на самой крайней точке множества. Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то принцип крайнего рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из чисел.

Основная сложность таких задач заключается в искусстве выбора крайних свойств.

Тема занятия № 20. Графы.

Практика: Граф — это математическая структура, которая используется для моделирования связей между объектами. Он состоит из вершин (узлов) и рёбер (связей), которые их соединяют.

Основные понятия

- Степень вершины — количество рёбер, связанных с вершиной. В ориентированном графе различают входящую и исходящую степень.
- Путь — последовательность вершин, соединённых рёбрами. Длина пути — количество рёбер в нём.
- Цикл — путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.
- Связность — граф называется связным, если между любыми двумя вершинами существует путь.
- Дерево — связный граф без циклов.
- Взвешенный граф — граф, в котором каждому ребру присвоен вес (число).

Виды графов

- Неориентированный — рёбра не имеют направления.
- Ориентированный — рёбра имеют направление (обычно обозначаются стрелками).
- Смешанный — содержит как ориентированные, так и неориентированные рёбра.
- Планарный — граф, который можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались.
- Связный — граф, в котором существует путь между любой парой вершин.
- Ациклический — граф, не содержащий циклов.

Тема занятия № 21. Инварианты.

Практика: Инвариант — термин, который обозначает нечто неизменяемое.

В математике инвариант — это свойство, остающееся неизменным при преобразованиях определённого типа. Например:

- Инвариант узла (в топологии) — величина, определённая для каждого узла и одинаковая для эквивалентных узлов.
- Инвариант графа — величина, определённая для графа и не зависящая от способа обозначения вершин.

Тема занятия № 22. Покрытия и упаковки.

Практика: Покрытия и упаковки — понятия, которые используются в математике для решения различных задач.

Покрытия

Покрытие в математике — это семейство множеств, объединение которых содержит заданное множество.

Например, диагональ прямоугольника разбивает его на два треугольника, которые образуют покрытие.

Упаковка в математике — это размещение внутри заданной фигуры нескольких фигур, не имеющих общих точек, кроме, возможно, граничных.

Цель задач на упаковки — либо упаковать отдельный контейнер как можно плотнее, либо упаковать все объекты, используя как можно меньше контейнеров.

Связь между покрытиями и упаковками

Каждая задача упаковки имеет двойственную задачу о покрытии, в которой нужно определить, сколько предметов требуется, чтобы полностью покрыть все области контейнера, при этом предметы могут накладываться.

Тема занятия № 23. Разрезания.

Теория: Задачи на разрезание — это задачи, в которых требуется разрезать фигуру на части, обладающие некоторыми свойствами.

Практика: Некоторые примеры таких задач:

- Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три равные части так, чтобы линии разреза шли по сторонам клеток. Поскольку фигура состоит из 15 клеток, то каждая из равных частей будет из 5 клеток.
- Разрежьте прямоугольник 4×9 по линиям сетки на две части так, чтобы из двух получившихся частей можно было сложить квадрат. Поскольку прямоугольник состоит из 36 клеток, то сторона квадрата будет равна 6.
- Прямоугольник 3×5 содержит 15 клеточек, центральная клетка удалена. Найдите пять способов разрезания оставшейся фигуры на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток.
- Разрежьте фигуру на две равные части по линиям сетки, причём в каждой из частей должен быть кружок.
- Разрежьте квадрат по сторонам клеток так, чтобы все части были одинакового размера и формы и чтобы каждая содержала по одному кружку и звёздочке.

Тема занятия № 24. Замещения.

Теория: Разрезание и замещение в математике — темы, связанные с решением задач, в которых нужно разделить фигуру на части или покрыть её другими фигурами без наложений и свободных клеток.

Эти задачи могут требовать не только разрезать или замостить фигуру, но и доказать, что такого разрезания или замощения не существует.

Практика: Примеры задач

Некоторые примеры задач на разрезание и замещение:

- Разрезание прямоугольника на части. Нужно разрезать прямоугольник 3×9 на восемь квадратов.
- Замощение прямоугольника уголками. Необходимо покрыть прямоугольник размером 4×6 клеток трёхклеточными уголками так, чтобы никакие два из них не образовывали прямоугольник.
- Разрезание фигуры на части с особыми свойствами. Например, нужно разрезать круг на три части так, чтобы из них можно было сложить новый круг, у которого отмеченная точка стояла бы в центре.
- Перекраивание фигуры. Нужно разрезать клетчатый прямоугольник 10×4 на две равные части и составить из них прямоугольник 8×5 .

Тема занятия № 25. Раскраски.

Практика: Раскраски в математике могут использоваться в разных контекстах, например:

- Математические раскраски — это картинки, на которых изображены арифметические действия разной сложности. Такие раскраски используют для обучения детей младшего школьного возраста. Принцип работы: в каждой области рисунка расположен пример или математическое выражение, которое нужно решить. Получившийся ответ соответствует определённому цвету, которым и нужно закрасить эту область.
- Метод раскраски применяют для решения олимпиадных задач и задач повышенного уровня сложности. Идея метода в том, что математические объекты делят на группы, наделяя их некоторыми свойствами. Каждой группе ставят в соответствие свой цвет, а затем составляют цветовую модель, которая помогает найти правильное решение.
- Раскраски могут помочь решить задачу на принцип Дирихле. Например, раскрашивая в определённые цвета, можно понять, что каких-то элементов одного цвета будет не меньше или не больше определённого значения.

Тема занятия № 26. Игры.

Практика: Математические игры могут быть разными в зависимости от возраста участников и формы проведения. Они помогают освоить математические понятия и навыки в игровой форме.

Тема занятия № 27. Симметрия и повороты.

Практика: Симметрия — это сбалансированное сходство и пропорции между двумя половинками объекта, когда одна сторона отражает другую. Существует несколько видов симметрии, например:

- Осевая симметрия. Каждой точке в плоскости по определённому закону ставится в соответствие другая точка той же плоскости. Фигура считается симметричной относительно прямой, если для каждой точки рассматриваемой фигуры симметричная для неё точка относительно прямой также находится на этой фигуре. Прямая в этом случае является осью симметрии фигуры.
- Центральная симметрия. Фигура симметрична относительно точки, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка также лежит на этой фигуре. Точка — это центр симметрии. Например, к фигурам с центральной симметрией относятся окружность и параллелограмм. У окружности центр симметрии — это её центр, у параллелограмма центр симметрии — это точка, в которой пересекаются его диагонали.

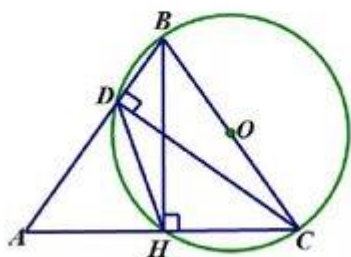
Поворот (вращение) — это движение, при котором хотя бы одна точка плоскости остаётся неподвижной. Если одна фигура получена из другой фигуры поворотом всех её точек относительно центра на один и тот же угол в одном и том же направлении, то такое преобразование фигуры называется поворотом. Чтобы поворот имел место, должен быть задан центр и угол поворота. Поворот может быть как по часовой, так и против часовой стрелки.

Тема занятия № 28. Вспомогательная окружность.

Теория: Вспомогательная окружность — это окружность, которая используется в геометрии для решения задач, связанных с геометрическими фигурами.

Суть метода вспомогательной окружности: на чертёж задачи вводится окружность, которую можно вписать или описать около треугольника, четырёхугольника или многоугольника. После этого связи между данными и искомыми величинами становятся очевидными.

Построим вспомогательную окружность, с центром в точке O (середина BC), которая пройдет через точки H и D .



Практика: Применение метода

Метод вспомогательной окружности применяется в планиметрических задачах, когда требуется установить равенство углов, найти длину отрезка или доказать свойство фигуры.

Признаки использования

Применение вспомогательной окружности зависит от характерных признаков конкретной геометрической фигуры. Некоторые из них:

- Правильный треугольник. Можно провести окружность с центром в любой из вершин и радиусом, равным длине стороны, или описать около треугольника окружность, которая разобьётся вершинами на равные дуги по 120° каждая.
- Прямоугольный треугольник. Вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы, а радиус равен медиане, проведённой к гипотенузе.
- Четырёхугольник, сумма противоположных углов которого равна 180° . Около такого четырёхугольника можно описать окружность.
- Отрезок, концы которого видны из двух точек под одним и тем же углом. Через эти точки и концы отрезка можно провести окружность.

Примеры задач

- Задача на нахождение длины отрезка. В треугольнике проведена высота, нужно найти длину отрезка, соединяющего точку с серединой основания, если основание равно 10 см. Решение: провести высоту, углы которой равны по 90° , значит точки, связанные с высотой, лежат на одной окружности, и основание — диаметр. Длина отрезка равна радиусу этой окружности.

Задача на доказательство равенства углов. Например, если высоты остроугольного треугольника пересекаются в точке, нужно доказать, что углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Решение: отрезок, на который опираются углы, виден из точек, образующих высоту, под одним и тем же углом, значит, точки лежат на одной окружности. Углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Тема занятия № 29. Метод вспомогательной площади.

Практика: Метод вспомогательной площади — метод решения задач на площадь, который заключается в использовании вспомогательной фигуры для упрощения сравнения площадей исходных фигур.

Алгоритм метода

К двум сравниваемым фигурам добавляют или, наоборот, вырезают какую-то общую часть (вспомогательную фигуру) таким образом, чтобы площади полученных комбинаций были легко вычисляемыми. Если площади новых фигур равны, и если площадь вспомогательной части известна, то исходные фигуры также равны по площади.

Примеры задач

- Доказательство равенства площадей треугольников, образованных при пересечении диагоналей трапеции. К обоим треугольникам добавляют общий треугольник, доказывают, что полученные большие треугольники равны по площади, а значит, равны по площади и части без общей площади. Площадь треугольника — вспомогательная площадь.
- Решение задачи на нахождение высоты, проведённой к боковой стороне равнобедренного треугольника, если известны основание и высота, проведённая к основанию. Площадь треугольника с одной стороны — половина произведения основания на высоту, проведённую к основанию, с другой — половина произведения боковой стороны на соответствующую ей высоту. Боковая сторона треугольника легко вычисляется по теореме Пифагора, после чего задача сводится к решению уравнения, которое даёт искомую высоту.

Тема занятия № 30. Решение алгебраических задач с помощью подобия треугольников.

Практика: Решение алгебраических задач с помощью подобия треугольников основано на использовании свойств подобных треугольников, которые позволяют составлять пропорции и находить неизвестные величины.

Основные принципы решения

- Определение подобия треугольников. Треугольники подобны, если у них все углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны. Для этого используют один из признаков подобия: по двум углам, по двум сторонам и углу между ними или по трём сторонам.
- Составление пропорций. Если треугольники подобны, то их соответствующие стороны относятся друг к другу одинаково. Это позволяет найти неизвестные величины через отношение коэффициентов подобия.
- Использование свойств подобных треугольников. Например, отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Примеры задач

- Задача на нахождение длины стороны. Отрезки АВ и DC лежат на параллельных прямых, а отрезок АС пересекает отрезок ВD в точке М. Нужно вычислить длину МС, если АВ = 15, DC = 30, АС = 60.

Решение:

1. Рассмотреть треугольники $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$. Так как $AB \parallel DC$, то $\angle BAC = \angle DCA$ — накрест лежащие углы при секущей АС (по свойству параллельных прямых). Аналогично, $\angle ABD = \angle BDC$ — накрест лежащие углы при секущей ВD. Значит, $\triangle ABM \sim \triangle CDM$ по двум углам.
2. Найти коэффициент подобия: $AM/MC = AB/DC = 15/30 = 0,5$.
3. $AC = AM + MC = 0,5MC + MC = 1,5MC$.
4. Значит, $MC = AC / 1,5 = 60 / 1,5 = 40$.

Ответ: 40.

Тема занятия № 31. Решение олимпиадных задач.

Практика: Решаем олимпиадные задачи.

Тема занятия № 32. Заключительное занятие по данному модулю. Математический бой.

Практика: Математический бой.

Результат обучения по данному модулю

Обучающиеся:

- получили первоначальные сведения о решении нестандартных задач;
- научились решать задачи в целых числах;

- научились аналитически подходить к решению проблем и творчески осмысливать полученные знания.

2. Модуль «Комбинаторика вокруг нас»

Цель модуля:

Создание условий для формирования у обучающихся умений и навыков зашифровывать и расшифровывать сообщения

Задачи модуля:

- овладение системой знаний и умений по криптографии для последующего обучения в вузах;
- развить познавательную активность, внимание и усидчивость;
- совершенствовать умение обучающихся работать с научно – популярной литературой, справочниками

Форма контроля:

- анализ текстов художественной литературы, где приведены кодирование и декодирование информации;
- составление собственного шифра на основе различных самосовмещений квадрата;
- устные сообщения учащихся о своей работе;
- практикум по кодированию и декодированию;
- написание творческой работы

Учебно-тематический план модуля «Комбинаторика вокруг нас»

№ п/п	Наименование тем	Количество часов		
		всего	теория	практика
1.	Вводное занятие. Техника безопасности в кабинете. Задачи кодирования и декодирования.	2	2	-
2.	История криптографии.	2	2	-
3.	Самые интересные факты о кодах и шифрах.	4	2	2
4.	Одноалфавитные шифры.	4	2	2
5.	Шифры перестановки.	4	-	4
6.	Многоалфавитные шифры замены	4	-	4
7.	Самосовмещение квадрата. Метод решеток	2	-	2
8.	Комбинаторика в различных сферах деятельности	2	2	-
9.	Решение комбинаторных задач	4	-	4
10.	Заключительное занятие по данному модулю.	2	-	2
Итого:		30	10	20

Содержание второго модуля

Тема занятия №1. Вводное занятие. Техника безопасности в кабинете. Задачи кодирования и декодирования.

Теория: Знакомство обучающихся с программой модуля. Правила обучающихся в образовательном учреждении. Изучение инструкций по технике безопасности и пожарной безопасности.

Тема занятия № 2. История криптографии.

Теория: История криптографии насчитывает тысячелетия. Путь этой науки включает развитие от простых методов шифрования до сложных математических алгоритмов, лежащих в основе современной цифровой безопасности.

Древний мир

Первые известные примеры шифрования встречаются в Древнем Египте (около 1900 г. до н.э.), где использовались нестандартные иероглифы.

В Древней Спарте (V в. до н.э.) применяли скиталу — палочку определённого диаметра, на которую наматывалась лента пергамента. Сообщение писалось вдоль палочки, а после разматывания буквы казались хаотичным набором. Прочсть его можно было, лишь намотав ленту на скиталу такого же диаметра.

Ещё один пример — шифр Цезаря (I в. до н.э.), который заключался в смещении букв на фиксированное число позиций.



Средневековье и эпоха Возрождения

В Средневековье криптография развивалась, но в основном использовались простые подстановочные шифры.

В IX веке арабский математик Аль-Кинди разработал метод частотного анализа — первый научный способ взлома шифров, основанный на частоте появления букв.

В 1465 году Леоне Альберти изобрёл полиалфавитный шифр, который использовал два разных алфавита: один для исходного текста, другой для зашифрованного.



Новое время

Некоторые достижения криптографии в Новое время:

- В 1790-х годах Томас Джефферсон описал шифровальное колесо — набор из 36 вращающихся колец с буквами, который позволял создавать сложные комбинации.
- Во время Второй мировой войны появилась машина «Энигма», применявшаяся нацистской Германией. Она шифровала сообщения с помощью серии роторов. Взломать «Энигму» удалось только благодаря ранним компьютерам и команде криптоаналитиков.

Современная криптография

С появлением компьютеров криптография шагнула на новый уровень. 128-битное шифрование стало стандартом для большинства защищённых систем.

Также с 1990 года началась разработка квантовой криптографии — области, использующей законы квантовой физики для создания непробиваемых систем.

Тема занятия №3. Самые интересные факты о кодах и шифрах.

Теория: Несколько интересных фактов о кодах и шифрах:

- Древнегреческий учёный и полководец Эней Тактик придумал первый шифровальный аппарат — «диск Энея». На круглую пластину наносились буквы алфавита, а рядом с каждой из них проделывались отверстия. Шифровали так: сквозь отверстия, соответствовавшие буквам, продевали нитку.
- Самым известным древним методом шифрования можно признать шифр Цезаря — моноалфавитный шифр, где каждая буква заменялась на букву того же алфавита, но через три позиции.
- Одним из старейших устройств шифрования была скитала — стержень определённого диаметра. На него наматывали по спирали полоску пергамента и писали вдоль оси искомый текст. Восстановить его мог только человек с «ключом» — скиталой такого же диаметра и длины.
- Среди учёных появилась традиция вести свои записи и публиковать неоднозначные результаты в зашифрованном виде. Если открытие оказывалось ложным, его никто так и не мог прочитать. В случае успешной проверки затем публиковали ключ, и расшифрованная фраза подтверждала статус первооткрывателя.
- Во время Второй мировой войны британское управление специальных операций общалось с агентами в тылу врага, используя коды, основанные на стихотворениях.

Самым древним сообщением, в котором что-то намеренно изменили, признают надпись на гробнице Хнумхотепа II (примерно 1900 год до н. э.). Рассказывая историю жизни своего господина, автор изменил начертания некоторых иероглифов, чтобы егоopus выглядел посolidнее.

Практика: Выполняем задание на заданную тему.

Тема занятия № 4. Одноалфавитные шифры.

Теория: Одноалфавитный шифр (шифр простой замены, моноалфавитный шифр) — группа методов шифрования, которые сводятся к созданию по определённому алгоритму таблицы шифрования, в которой для каждой буквы открытого текста существует единственная сопоставленная ей буква шифртекста.

Само шифрование заключается в замене букв согласно таблице. Для расшифровки достаточно иметь ту же таблицу, либо знать алгоритм, по которой она генерируется.

Практика: Пример одноалфавитного шифра — шифр Цезаря, в котором каждый символ алфавита исходного текста заменяется на сдвинутый относительно него на k позиций вправо символ того же алфавита, при этом k является ключом шифра.

Одноалфавитные шифры легко взломать, поскольку они отражают частотные данные исходного алфавита.

Тема занятия № 5. Шифры перестановки.

Практика: Шифры перестановки — это методы симметричного шифрования, в которых элементы исходного открытого текста меняют местами. Элементами текста могут быть отдельные символы, пары букв, тройки букв и так далее.

История

Первые упоминания о подобных методах датируются V веком до нашей эры в работах греческого историка Геродота.

Одно из древнейших известных шифровальных устройств — «Считала». Оно представляло собой деревянный жезл определённого диаметра, на который наматывалась узкая полоска пергамента. Текст записывался вдоль оси жезла, а после сматывания полоски становился нечитаемым набором букв. Только владелец такой же считалы мог правильно прочитать сообщение, намотав ленту на жезл соответствующего диаметра.

Виды шифров

В классической криптографии шифры перестановки можно разделить на два класса:

1. Шифры одинарной (простой) перестановки — при шифровании символы открытого текста перемещаются с исходных позиций в новые один раз.
2. Шифры множественной (сложной) перестановки — при шифровании символы открытого текста перемещаются с исходных позиций в новые несколько раз.

Примеры шифров

- Шифр «Атбаш». Использует перестановку букв алфавита в обратном порядке: первая буква заменяется последней, вторая — предпоследней и так далее. Например, слово «привет» при шифровании методом «Атбаш» будет выглядеть как «квирп».
- Шифр маршрутной перестановки. Использует геометрическую фигуру (плоскую или объёмную). Отрезок открытого текста записывается в фигуру по одной траектории, а выписывается по другой.
- Шифр двойной перестановки. При шифровании в таблицу по определённому маршруту записывается текст, затем переставляются столбцы и строки. Далее по определённому маршруту выписывается шифрограмма.

Криптоанализ

Шифры перестановки уязвимы к некоторым видам атак, например:

- Статистическая атака. Шифр перестановки не изменяет частоту букв в зашифрованном тексте, поэтому можно анализировать частоту отдельной буквы.
- Атака по образцу. Зашифрованный текст, созданный с помощью ключевого шифра перестановки, может иметь некоторые повторяющиеся образцы.

Для усиления шифра перед считыванием текста из таблиц возможны перестановки столбцов или строк, либо совместная перестановка строк и столбцов (двойная перестановка).

Тема занятия № 6. Многоалфавитные шифры замены.

Практика: Многоалфавитный шифр (полиалфавитный шифр) — это совокупность шифров простой замены, которые используются для шифрования очередного символа открытого текста согласно некоторому правилу.

Суть полиалфавитного шифра заключается в циклическом применении нескольких моноалфавитных шифров к определённому числу букв шифруемого текста. Например, к первой букве применяется первый моноалфавитный шифр, ко второй — второй, к третьей — третий и так далее, пока всё сообщение не будет зашифровано.

Некоторые примеры многоалфавитных шифров замены:

- Шифр Вижинера. Для шифрования используется таблица, представляющая собой квадратную матрицу, где количество символов в алфавите. В первой строке матрицы записывают буквы в порядке очередности их в исходном алфавите, во второй — ту же последовательность букв, но с циклическим сдвигом влево на одну позицию, в третьей — со сдвигом на две позиции и так далее.
- Шифр с бегущим ключом (книжный шифр). В этом методе один текст используется в качестве ключа для шифрования другого текста. Периодом в таком методе шифрования будет длина выбранного в качестве ключа произведения.

Шифр Тритемия. Согласно этому методу, очередная буква заменяется символом из собственного шифралфавита, причём каждый следующий алфавит получается из предыдущего путём сдвига на одну букву. Совокупность этих шифров сдвига, записанных по порядку один под другим, называется таблицей Тритемия.

Тема занятия № 7. Самосовмещение квадрата. Метод решёток.

Практика: Шифр «Самосовмещение квадрата» (метод решёток) — метод кодирования информации, основанный на использовании свойств квадрата и решёток.

Принцип работы

Для шифрования создают решётку, которая при наложении на квадрат оставляет открытыми некоторые клетки. Затем в первую часть квадрата вписывают цифры от 1 до 16 (количество зависит от длины сообщения).

При самосовмещении (повороте квадрата вокруг точки пересечения диагоналей) цифры заполняют другие части квадрата в различных положениях. Каждая конкретная решётка изготавливается для определённого набора самосовмещений.

Для расшифровки используют обратную процедуру: поворачивают решётку, чтобы определить, какие цифры соответствуют буквам сообщения.

Примеры

Шифром «Самосовмещение квадрата» можно зашифровать, например, сообщение «В чужой монастырь со своим уставом не ходят». Если наложить решётку на текст и постепенно поворачивать её на 90° по часовой стрелке, то будут последовательно проступать буквы сообщения.

Чтобы усложнить расшифровку, можно использовать разные способы выделения чисел из квадрата. Например, если на большом квадрате находятся четыре единицы, их можно выделить 16 различными способами.

Тема занятия № 8. Комбинаторика в различных сферах деятельности.

Теория: Некоторые сферы деятельности, в которых применяется комбинаторика:

- Педагогическая деятельность. С помощью комбинаторики составляются школьные расписания. При этом учитывается не только количество дисциплин, проводимых в день, но и сочетаемость дисциплин друг с другом.
- Общественное питание. Комбинаторика помогает составлять меню.
- Лингвистика. Рассматриваются варианты комбинаций букв.
- География. Комбинаторика используется для раскраски карт.
- Спортивные соревнования. С её помощью рассчитывают количество игр между участниками.
- Производство. Комбинаторика помогает распределять несколько видов работ между рабочими.
- Агротехника. С её помощью размещают посевы на нескольких полях.
- Азартные игры. Комбинаторика используется для подсчёта частоты выигрышей.
- Химия. Комбинаторика помогает анализировать возможные связи между химическими элементами.
- Экономика. Комбинаторика используется для анализа вариантов купли-продажи акций.
- Криптография. Комбинаторика помогает разрабатывать методы шифрования.
- Доставка почты. С её помощью рассматривают варианты пересылки.
- Биология. Комбинаторика применяется для расшифровки кода ДНК.
- Военное дело. Комбинаторика помогает располагать подразделения.
- Астрология. С её помощью анализируют расположение планет и созвездий.

Тема занятия № 9. Решение комбинаторных задач.

Практика: Для решения комбинаторных задач можно использовать разные методы, например перебор вариантов, построение дерева возможных вариантов, применение формул перестановок и сочетаний, а также онлайн-сервисы.

Метод перебора

При переборе рассматривают все возможные варианты, отвечающие условию задачи. Чтобы не пропустить и не повторить комбинации, их записывают в порядке возрастания.

Метод дерева возможных вариантов

Для решения задач методом дерева возможных вариантов составляют схему, которая внешне напоминает дерево. Корень дерева обозначает условие задачи, а ветви — возможные варианты.

Чтобы построить такое дерево, нужно:

1. Отметить точку — корень.

2. От этой точки провести все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить первые элементы комбинаций.
3. От каждого из этих концов нарисовать все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить вторые элементы комбинаций.
4. И так далее, пока не будет составлена вся комбинация.

Затем, двигаясь от корня по ветвям дерева, по порядку записывают полученные сочетания.

Формулы перестановок и сочетаний

Для решения задач используют формулы, которые учитывают порядок элементов (перестановки) или порядок не важен (сочетания).

Формула перестановок: $P(n) = n!$.

Формула сочетаний: $C(n, k) = n! / (k! \times (n-k)!)$.

Пример задачи на перестановки: сколько способов выбрать 3 человека из 10, если порядок важен?

Решение: $P(10, 3) = 10 \times 9 \times 8 = 720$ способов.

Пример задачи на сочетания: сколько способов выбрать 3 человека из 10, если порядок не важен?

Решение: $C(10, 3) = 10! / (3! \times 7!) = 120$ способов.

Тема занятия № 10. Заключительное занятие по данному модулю.

Практика: Делаем работу на свободную тему.

Результат обучения по данному модулю

Обучающиеся:

- ☐ научились анализировать математическую задачу как способ кодирования и декодирования материала;
- ☐ усвоили один из методов кодирования и декодирования материала;
- ☐ получили умение замечать сходство и различие в ситуациях, текстах заданий, анализировать алгоритмический материал.
- ☐ представление о применении комбинаторных задач в жизни.

3. Модуль «Финансы и математика»

Цель модуля:

Освоение обучающимися основы экономической грамотности, помочь ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы

Задачи модуля:

– сформировать умения применять математические знания для решения жизненных проблем

Форма контроля:

- тестирование по пройденному материалу

Учебно-тематический план модуля «Финансы и математика»

№ п/п	Наименование тем	Количество часов		
		всего	теория	практика
1.	Вводное занятие. Техника безопасности в кабинете. Понятие процента. Основные задачи на проценты.	2	2	-
2.	Формулы и схемы «простого процентного роста».	2	-	2
3.	Формулы и схемы «сложного процентного роста».	2	-	2
4.	Решение задач на ценообразование.	2	-	2
5.	Практическая работа по теме “Проценты”	2	-	2
6.	Исторические сведения о применении процентов ростовщиками и банками.	2	2	-

7.	Решение задач на многократное начисление процентов в течение одного года.	2	-	2
8.	Практическая работа по теме “ Многократное начисление процентов в течение одного года”	2	-	2
9.	Решение задач на многократное начисление сложных процентов в течение нескольких лет.	2	-	2
10.	Практическая работа по теме “Многократное начисление сложных процентов в течение нескольких лет”	2	-	2
11.	Фирмы-распространители. Сетевая технология. Решение задач.	2	2	-
12.	Как выбрать выгодный вклад в банке. Как накопить деньги? Акции.	2	-	2
13.	Заключительное занятие. Творческая работа. Как обеспечить себе будущее?	2	-	2
Итого:		26	6	20

Содержание третьего модуля

Тема занятия №1. Вводное занятие. Техника безопасности в кабинете. Понятие процента. Основные задачи на проценты.

Теория: Знакомство обучающихся с программой модуля. Правила обучающихся в образовательном учреждении. Изучение инструкций по технике безопасности и пожарной безопасности. Понятие процента можно раскрыть так: процент — это сотая доля числа, принимаемого за целое (обозначается знаком «%»). Чтобы выразить проценты числом, нужно количество процентов разделить на 100. Чтобы выразить число в процентах, нужно это число умножить на 100.

Тема занятия № 2. Формулы и схемы «простого процентного роста».

Практика: Формула простого процентного роста: $S_n = 1 + pn / 100 * S$, где:

- S_n — новая сумма вклада;
- p — проценты (ежедневные, ежемесячные, ежегодные);
- n — число дней (месяцев, лет);
- S — сумма вклада.

Схемы простого процентного роста могут включать решение задач, в которых нужно найти, например, какую сумму получит вкладчик, если закроет вклад в определённом году, если сумма увеличивается ежегодно на определённый процент от начальной суммы.

Тема занятия №3. Самые интересные факты о кодах и шифрах.

Теория: Несколько интересных фактов о кодах и шифрах:

- Древнегреческий учёный и полководец Эней Тактик придумал первый шифровальный аппарат — «диск Энея». На круглую пластину наносились буквы алфавита, а рядом с каждой из них проделывались отверстия. Шифровали так: сквозь отверстия, соответствовавшие буквам, продевали нитку.
- Самым известным древним методом шифрования можно признать шифр Цезаря — моноалфавитный шифр, где каждая буква заменялась на букву того же алфавита, но через три позиции.
- Одним из старейших устройств шифрования была скитала — стержень определённого диаметра. На него наматывали по спирали полоску пергамента и писали вдоль оси искомый текст. Восстановить его мог только человек с «ключом» — скиталой такого же диаметра и длины.

- Среди учёных появилась традиция вести свои записи и публиковать неоднозначные результаты в зашифрованном виде. Если открытие оказывалось ложным, его никто так и не мог прочитать. В случае успешной проверки затем публиковали ключ, и расшифрованная фраза подтверждала статус первооткрывателя.
- Во время Второй мировой войны британское управление специальных операций общалось с агентами в тылу врага, используя коды, основанные на стихотворениях.

Самым древним сообщением, в котором что-то намеренно изменили, признают надпись на гробнице Хнумхотепа II (примерно 1900 год до н. э.). Рассказывая историю жизни своего господина, автор изменил начертания некоторых иероглифов, чтобы его опус выглядел посolidнее.

Тема занятия № 3. Формулы и схемы «сложного процентного роста».

Практика: Сложный процентный рост — это система начисления денег, при которой за первый год к внесённой сумме на счёте начисляется определённое количество процентов. В конце года вкладчик может снять со счёта эти деньги, но если он этого не делает, то проценты присоединяются к начальному вкладу, и в конце следующего года проценты начисляются уже на новую, увеличенную сумму.

Формула сложного процентного роста (или сложных процентов) имеет вид: $S_n = S (1 + p/100)^n$, где:

- S_n — сумма, которая будет на счёте через n лет;
- S — внесённая сумма;
- p — процентная ставка;
- n — количество лет.

Формула применима не только к задачам о росте вклада, но и к любым ситуациям, когда величина за каждый заданный промежуток времени увеличивается на определённое число процентов, считая от предыдущего её значения.

Схемы сложного процентного роста могут быть представлены, например, в виде презентации, в которой будут представлены задачи на эту тему и формулы для их решения. Такие материалы можно найти на сайтах nsportal.ru и infourok.ru.

Тема занятия № 4. Решение задач на ценообразование.

Практика: Решение задач по ценообразованию включает несколько этапов: формулировку условий, анализ данных и использование подходящих методов.

Примеры задач

Задача 1: определить розничную цену изделия при условии, что оно поставляется в розничную сеть через двух посредников, если известны следующие данные:

- себестоимость — 10 руб.;
- налог на добавленную стоимость (НДС) — 18% к свободной отпускной цене (без НДС);
- свободная отпускная цена (с НДС) — 42 руб.;
- снабженческо-сбытовая надбавка — 25%;
- торговая надбавка — 20% к цене закупки.

Решение:

1. Определить свободную отпускную цену производителя без учёта НДС: $42 - 0,18 \times 42 = 35,6$ руб..
2. Рассчитать НДС производителя: $0,18 \times 35,6 = 6,4$ руб..
3. Определить рентабельность производства и прибыль производителя: рентабельность — 256%, прибыль — 25,6 руб..
4. Рассчитать снабженческо-сбытовые надбавки: для первого посредника — $42 \times 0,25 = 10,5$ руб., для второго — $54,39 \times 0,25 = 13,6$ руб..
5. Определить величину торговой надбавки: $70,44 \times 0,2 = 14,09$ руб..

6. Рассчитать НДС торговой надбавки: $14,09 \times 0,18 = 2,54$ руб..
7. Определить розничную цену: $70,44 + 14,09 + 2,54 = 87,07$ руб..

Методы решения

Для решения задач по ценообразованию используют различные методы, например:

- Затратные. Ориентируются на постоянные и переменные издержки производства и реализации продукции. Примеры: метод полных издержек (сумма постоянных, переменных издержек и порога прибыльности) или метод прямых затрат (сумма переменных издержек и наценка).
- Рыночные. Учитывают спрос, конкуренцию и потенциальную ценность продукта для потребителей. Например, метод пробных продаж (изменение стоимости товара и наблюдение за реакцией покупателей) или динамическое ценообразование (базируется на соотношении спроса и предложения в конкретный период времени).
- Параметрические. Используются для расчёта цены на новые товары на основе сравнения их со старыми или базовыми моделями. Примеры: агрегатный метод (цена сложного продукта — сумма затрат на все составляющие и стоимость работ по сборке), метод удельной цены (сравнение с базовой моделью и адаптация цены).

Тема занятия № 5. Практическая работа по теме «Проценты»

Практика: Практическая работа по теме «Проценты» может включать задания на нахождение процента от числа, числа по его процентам и определение, сколько процентов одно число составляет от другого.

Пример заданий:

1. Призерами городской олимпиады по математике стали 48 учеников, что составило 16% числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?
2. Товар в магазине стоил 3600 рублей. Сначала стоимость понизили на 30%, а потом повысили на 25%. Какова стоимость товара после двух изменений?
3. Поступивший в продажу в декабре мобильный телефон стоил 2500 рублей. В январе он стал стоить 1750 рублей. На сколько процентов снизилась цена на мобильный телефон в период с декабря по январь?
4. Билет в кино стоит 500 рублей. Двум киноманам из группы в пять человек была сделана скидка в 1%. Сколько в сумме отдали эти 5 киноманов за сеанс в кино?
5. Плазменный телевизор стоит 20 000 рублей. Известно, что в прошлом году он был на 17% дешевле. Сколько стоил плазменный телевизор в прошлом году?

Решение задач на проценты:

- Чтобы найти проценты от числа, нужно выразить проценты обыкновенной или десятичной дробью и умножить полученную дробь на данное число.
- Чтобы найти число по его процентам, нужно выразить проценты обыкновенной или десятичной дробью и разделить на эту дробь данное число.
- Чтобы найти, сколько процентов составляет первое число от второго, нужно разделить первое число на второе и результат умножить на 100%.

Тема занятия №6. Исторические сведения о применении процентов ростовщиками и банками.

Теория: Некоторые исторические сведения о применении процентов ростовщиками и банками:

- В Древнем Риме было принято платить долги и проценты по ним в первый день каждого месяца. У каждого кредитора была долговая книга, которая называлась «Календариум». Общепринятая процентная ставка по кредиту была такой: за каждые 100 монет долга каждый месяц надлежало добавлять одну монету.

- В Вавилоне в своде законов царя Хаммурапи (1750 г. до н. э.) была установлена максимальная ставка кредита — 33,5% зерном или 20% серебром. Если должник не мог выплатить кредит, то он становился рабом для своего кредитора на срок до трёх лет.
- В Греции крупнейшими ростовщиками стали храмовые комплексы, в городах также работали и частные кредитные организации. Процентная ставка колебалась от 20 до 30% годовых. Согласно правилам греческого законодателя Дракона, должник, который просрочил выплату долга, вместе с семьёй становился собственностью займодавца.
- В Киеве в 1113 году произошло восстание горожан, вызванное грабительскими процентными ставками ростовщиков и спекулятивными ценами на продукты первой необходимости. Тогда князь Владимир издал «Устав Володимира Всеволодовича», в котором определил порядок списания накопившихся долгов, ввёл строгие ограничения на величину взимаемых процентов, а предельный срок начисления процентов установил в три года.
- В Европе проценты появились на 1000 лет позже, их ввёл бельгийский учёный Симон Стевин. В 1584 году он впервые опубликовал таблицу процентов.
- В России первый банк — Дворянский заёмный банк был создан в 1754 году именно для того, чтобы спасти от грабительских процентов дворян. Кредиты этот банк выдавал под фиксированную ставку 6%, а ростовщики требовали за свои услуги от 10% и выше.

Тема занятия № 7. Решение задач на многократное начисление процентов в течение одного года.

Практика: Для решения задач на многократное начисление процентов в течение одного года используют формулу сложных процентов или формулу по ссудному проценту.

Формула имеет вид: $FV = PV * (1 + r / m)^{m*n}$, где:

- PV — текущая стоимость;
- r — процентная ставка;
- n — число лет;
- m — количество начислений в году;
- FV — будущая стоимость.

Пример задачи: через сколько лет вкладчик получит 20 000 рублей, если процентная ставка равна 13,8%, первоначальный вклад 12 000 рублей, проценты начисляются 2 раза в месяц?

Решение: $n = (\log 1 + r / m (FV / PV)) / m$.

Вычисление: $n = (\log 1 + 0,138/24 (20000 / 12000)) / 24$.

Ответ: вкладчик получит запланированную сумму через 3,71 года.

Тема занятия № 8. Практическая работа по теме “Многократное начисление процентов в течение одного года”

Практика: Пример задачи:

Вкладчик положил на счёт 30 000 рублей и в течение трёх лет не будет снимать деньги со счёта. Банк выплачивает 20% в год, и проценты после каждого начисления присоединяются к начальной сумме (капитализируются). Нужно подсчитать, сколько денег будет на счёте вкладчика через три года.

Решение:

1. По прошествии первого года сумма начисленных процентов составит 6000 рублей. Поскольку проценты капитализируются, то в конце первого года на счёте вкладчика окажется сумма $30\,000 + 6000 = 36\,000$ рублей.
2. В конце второго года банк будет начислять проценты на новую сумму 36 000 рублей, и сумма начисленных процентов составит 6000 рублей.
3. В конце третьего года банк будет начислять проценты уже на новую сумму 43 200 рублей, и сумма начисленных процентов составит 8640 рублей.

В итоге к концу третьего года вклад увеличился на величину $51\,840 - 30\,000 = 21\,840$ рублей или на 21,84%

Тема занятия № 9. Решение задач на многократное начисление сложных процентов в течение нескольких лет.

Для решения задач на многократное начисление сложных процентов в течение нескольких лет используется формула сложных процентов: $SUM = X \times (1 + \%)^n$, где:

- SUM — конечная сумма;
- X — начальная сумма;
- % — процентная ставка (в процентах годовых, например, $10\% = 0,1$);
- n — количество периодов (лет, месяцев, кварталов).

Проценты, начисленные за один период, добавляются к основной сумме, и в следующем периоде проценты рассчитываются уже с увеличенной суммы.

Примеры задач

Задача 1: Вкладчик положил 30 000 рублей в банк под 20% годовых на 3 года. Нужно рассчитать, сколько денег будет на счёте через 3 года, если проценты после каждого начисления присоединяются к начальной сумме (капитализируются).

Решение:

1. После первого года сумма на счёте составит: $30\,000 + 6\,000 = 36\,000$ рублей.
2. Во второй год проценты начисляются на новую сумму — 36 000 рублей, поэтому сумма на счёте будет: $36\,000 + 6\,000 = 43\,200$ рублей.
3. В третий год проценты начисляются уже на новую сумму — 43 200 рублей, поэтому сумма на счёте будет: $43\,200 + 8\,640 = 51\,840$ рублей.

Ответ: к концу третьего года вклад увеличился на $51\,840 - 30\,000 = 21\,840$ рублей.

Тема занятия № 10. Практическая работа по теме «Многократное начисление сложных процентов в течение нескольких лет»

Практика: Сложные проценты могут начисляться несколько раз в году (например, по месяцам, по кварталам, по полугодиям). В этих случаях необходимо задавать ставку процентов за период, или годовую ставку процентов, на основе которой будет определяться ставка процентов за период начисления (номинальную ставку процентов).

Сумма вклада с процентами будет определяться:

$$B = C (1 + K / m)^{T \cdot m}$$

где: K — номинальная годовая ставка процентов;

m — количество периодов начисления за год;

T · m — количество периодов начисления в течение срока хранения вклада.

Задачи:

1. Сложные проценты на вклады начисляются ежеквартально по номинальной годовой ставке 24%. Найти сумму процентов, начисленных на вклад 1700 руб. за 1 год.
2. Сложные проценты начисляются по полугодиям по ставке 21% годовых. Найти необходимую сумму вклада для накопления через три квартала 1500 руб.
3. Вкладчик внес в банк 5000 руб. под 11% годовых 1.12.2002 г. Депозитный договор заключен до 1.06.2003 г. Календарная база определяется по английской практике. Необходимо определить, при каком методе расчета суммы процентов вкладчик получит максимальный доход. Варианты начисления:
 - простые проценты;
 - сложные проценты с ежемесячными начислениями;
 - сложные проценты с начислениями процентов в конце срока;
 - сложные проценты с начислениями 1 раз в квартал.

Тема занятия №11. Фирмы-распространители. Сетевая технология. Решение задач.

Теория: Задачи по сетевой технологии для фирм-распространителей могут включать, например, планирование структуры сети, оптимизацию ресурсов, обеспечение безопасности. Для их решения используются различные методы, такие как сетевое планирование, оптимизация трафика, использование протоколов.

Примеры задач

- Разработка схемы сети для распространения продукции. Фирма использует радио- и телевизионную сеть для рекламы, но хочет определить оптимальное распределение средств между ними. Известно, что каждая минута радиорекламы обходится в 5 долларов, а минута телерекламы — в 100 долларов. Также опыт показал, что объём сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Нужно найти решение, которое позволит использовать радиосеть в два раза чаще, чем сеть телевидения, при ограниченных затратах на рекламу.
- Оптимизация трафика в телекоммуникационной сети. Необходимо определить маршруты прохождения трафика между сетями, учитывая топологию сети провайдера и матрицу запросов. Для этого используются протоколы динамической маршрутизации, которые ищут маршрут с минимальной стоимостью.
- Обеспечение безопасности в сети. Нужно разработать систему разграничения прав доступа к информационным ресурсам, настроить защиту портов доступа на коммутаторах.

Для решения задач по сетевой технологии для фирм-распространителей также могут использоваться программы моделирования сетей, например, Packet Tracer, которые позволяют создавать сети с большим количеством устройств и оценивать возможные сценарии развития событий.

Тема занятия №12. Как выбрать выгодный вклад в банке. Как накопить деньги? Акции.

Практика: Выбор вклада, накопление денег и инвестиции в акции требуют учёта разных аспектов. Ниже рассматриваются рекомендации по каждому из направлений.

Выбор вклада

- Определить цель и срок вклада. Если сумма не потребуется в ближайшие несколько лет, подойдёт долгосрочный вклад от года, ставка будет зафиксирована на весь срок договора. Если деньги понадобятся раньше, можно выбрать краткосрочный вклад (на 3, 6 или 12 месяцев).
- Изучить условия вклада. Обратит внимание на схему выплаты процентов, возможность пополнения или частичного снятия, условия продления вклада и закрытия счёта.
- Выбрать надёжный банк. Стоит оценить репутацию банка, его рейтинг и участие в системе страхования вкладов.
- Использовать специальные предложения. Например, повышенные ставки для новых клиентов или приветственные акции.
- Составить личный финансовый план. Определить цели, проанализировать текущее финансовое положение, оптимизировать расходы.
- Создать резервный фонд. Рекомендуются накопить сумму, равную 3–6 месяцам расходов, и хранить её в надёжном месте.
- Использовать методы накопления. Например, правило 50/30/20 — 50% доходов на обязательные расходы, 30% на личные нужды, 20% — на накопления.
- Настроить автоматическое откладывание. Это поможет избежать соблазна потратить деньги, так как они не будут видны на основном счёте.

Тема занятия №13. Заключительное занятие. Творческая работа. Как обеспечить себе будущее?

Практика: Делаем творческую работу на тему «Как обеспечить себе будущее?»

Результат обучения по данному модулю

Обучающиеся:

- научились выделять в ситуации проблему, которая решается средствами математики;
- усвоили наиболее известные приемы и методы применения математических знаний в различных областях науки, техники и в жизненных ситуациях;
- получили прочные навыки обращения с процентами в повседневной жизни.

3. Ресурсное обеспечение программы

Непременным условием эффективной реализации программы является достаточное соответствующее материально-техническое обеспечение программы и подготовленный педагогический кадровый состав, обладающий профессиональными и педагогическими знаниями.

Четкое следование целевому назначению выделяемых на реализацию программы средств позволяют создать необходимые материально-технические условия для организации педагогической деятельности.

Помещения, учебные кабинеты для занятий по программе находятся в структурных подразделениях ЦДТ и на базе школ района.

В целом деятельность по реализации данной образовательной программы обеспечивается посредством создания и дальнейшей эксплуатации специализированной материально-технической базы, формируемой в строгом соответствии с целями, задачами, финансами, организационными и кадровыми возможностями учреждения.

Необходимо отметить, что в работе педагога дополнительного образования очень важным моментом является обеспечение полного соблюдения правил охраны труда детей, норм санитарной гигиены в помещении и на рабочих местах, правил электрической и пожарной безопасности. Педагоги регулярно знакомят детей с различными инструментами, материалами, способами их рационального применения.

Перечень материально-технических средств по программе

1. Зачетные карточки с заданиями
2. Каталог заданий олимпиад
3. Задачники с задачами повышенной сложности и практическим содержанием
4. Модели геометрических тел
5. Справочники по математике
6. Таблицы и схемы по математике
7. Копилка внеклассных мероприятий
8. Проектор, экран, ноутбук
9. Портреты выдающихся математиков
10. Геометрические инструменты для работы у доски (угольники, транспортиры, циркули, линейки)

4. Список литературы и интернет-ресурсов

1. П.И.Горнштейн, А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир «Экзамен по математике и его подводные рифы», М: Харьков: «Илекса», «Гимназия», 2022г.
2. В.А.Гусев, А.И. Орлов, А.Л. Розенталь «Внеклассная работа по математике» (6 – 8 классы), М: «Просвещение», 2023г.
3. Г.И.Глейзер «История математики в школе» (4–6 классы), М: «Просвещение», 2022г.
4. Л.И.Гуткин «Сборник задач по математике с практическим содержанием», М: «Высшая школа», 2022г.
5. М.А.Евдокимов, В.П.Радченко «Задачи вступительных экзаменов по математике», Самара, 2023г.
6. А.С.Зеленский «Сборник конкурсных задач по математике», М: «АСТ-ПРЕСС», 2022г.

7. Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын, С.И.Шварцбурд «Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа», М: «Просвещение», 2023г.
8. Ю.М.Калягин «Поисковые задачи по математике», М: «Просвещение», 2023г.
9. В.Г.Коваленко «Дидактические игры на уроках математики», М: «Просвещение», 2021г.
10. Н.П.Кострикина «Задачи повышенной трудности в курсе алгебры» (7 - 9 классы), М: «Просвещение», 2022г.
11. Э.Д.Коганов «400 самых интересных задач с решениями» (6 - 11 классы), М: «Юнвес», 2021г.
12. А.А.Мазаник «Реши сам», М, 2021г., ч. III,.
13. С.Н.Олехник, Ю.В.Нестеренко, М.К.Потапов «Старинные занимательные задачи», М: «Вита-пресс», 2022г.
14. А.И.Осипов, Ф.А.Матвеева «Методические указания к решению задач по математике», Куйбышев, 2023г.
15. Я.И.Перельман «Занимательная алгебра», М: «Наука», 2022г.
16. А.Я.Симонов, Д.С.Бакаев, А.Г.Эпельман, А.А.Бесчинская, Р.М.Мостовой, А.Л.Абрамов «Система тренировочных задач и упражнений по математике», М: «Просвещение», 2021г.
17. И.Ф.Шарыгин, А.В.Шевкин «Задачи на смекалку» (5 - 6 классы), М: «Просвещение», 2022г.
18. Г.Н.Ястрибинецкий «Уравнения и неравенства, содержащие параметры», М: «Просвещение», 2022г.
19. Болдырева М.Х. , Клековкин Г.А. «Факультативный курс по математике», Самара, 2023г.